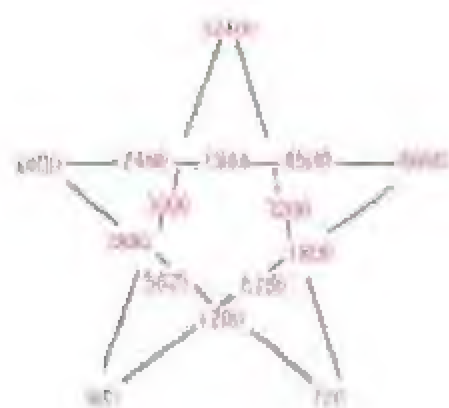
岑中枢　著

不定方程的整数解和填数法



$$x^n + y^m = z^k$$

$$ax + bxy + cy = M$$

海南出版社

责任编辑:武　铠

封面设计:蔡于良





ISBN 7-80590-539-8/G·36

定价:20元

不定方程的整数解和填数法

岑中枢　著

海　南　出　版　社

(琼)新登字 03 号

责任编辑　武　铠
封面设计　蔡于良

不定方程的整数解和填数法

岑中枢　著

海南出版社出版发行
海南农垦报社印刷厂印刷
*　　*　　*
850×1168 毫米 1/32 开本　14.5 印张　350 千字
1994 年 10 月第 1 版　1994 年 10 月第 1 次印刷
印数 1—3000 册
ISBN　7—80590—539—8/G・36
定价:20.00 元



作者简介

李中枢，曾用名黄乃吟，海南省澄迈县老城镇美鼎村人。早年就读于广东省立琼崖师范学校师范科，毕业后，历任小学校长、中学教员、行政机关秘书等职。五十年代曾受聘为北京、武汉、广州、海口等市的一些报刊的特约通讯员和特约记者，多次发表文章。现在海南省总工会担任文秘工作。

作者酷爱数学，本书是他多年利用业余时间经过刻苦钻研而写成的。

前　言

本书共有两部。

第一部《不定方程的整数解》是专门讨论解不定方程的方法，其中的一些解法有别于经典名著，也如社会上人们常说的“旁门左道”之类。

不定方程的内容非常丰富，我国古代数学家所写的《孙子算经》、《猴子分桃》、《勾股数》等等都属不定方程，为人们所喜爱。数论是数学的皇冠，不定方程在数论中占有重要地位，近代人所研究的哥德巴赫猜想和费马大定理就是不定方程中层次较高的一部分。研究费马大定理，经过三百余年，直至今日，这一命题才被英国数学家、美国普林斯顿大学教授威尔斯给予解决，哥德巴赫猜想则还在继续研究中。我国数学家陈景润、王元等人都在此研究中取得很大成果，且居世界领先地位，但是还没有最后解决，世界数学家都为此历尽艰辛付出很大代价。在研究这些课题的过程中，有人总想从不同的角度或从不同的侧面试图证明命题的正确性。本书不定方程的整数解部分从第三章起所探讨的多元高次不定方程，也曾作此尝试，即使不能达到目的，但书中所列举的一些解的表示式，仍不迭为研究不定方程这一长河中的一些重要部分，因此，它可供有志钻研不定方程的人们学习和参考。

第二部《填数法》，是专门讨论把一个直、横行格数相等的方形图，用不同的正整数填入格中，使不论是直行、横行、斜角行每行数字之和或每行数字之积都相等的填数法。填数在我国已有悠久历史，著名数学家华罗庚、陈景润都曾经研究填数，而且还从中引发出一些比较重要的数学命题。填数是一种技巧，逻辑性

很强，它可提高人的推理能力，使人变得更聪明，特别是某些填数已引起大、中、小学生和老师以及从事数学研究工作者的极大兴趣。本书的填数法，即使繁杂一些，但仍可供广大读者的学习、参考或作为一种课外读物，作者希望它能起到抛砖引玉的作用。

由于作者水平有限，书中错误难免，恳请广大读者给予指正，不胜感谢。

岑中枢

一九九四年三月　于海口

目　　录

第一章　二元一次不定方程的讨论

先从二元一次不定方程的整数解谈起。在不定方程

$$ax + by = M \tag{1}$$

式中，a 和 b 是零以外的整数，它们可以是正整数，也可以是负整数，这里只讨论它们是正整数的时候；M 是整数，x 和 y 是要求的整数。这个不定方程，不是随便都有整数解的，现在讨论于下：

M 是个整数，M 可以等于 0，也可以不等于 0，现在先讨论 $M = 0$ 的情况。

第一节　常数项 M 等于 0 的时候

$$ax + by = 0 \tag{2}$$

很明显，(2) 式有一组整数解为 $x = 0, y = 0$，当 (2) 式中的 a 和 b 是互素的时候，【如果不互素，即 $(a,b) = d > 1$，把 (2) 式写成 $d(a_1x + b_1y) = 0$，可得到 $(a_1, b_1) = 1$，故不妨假设 $(a,b) = 1$，】则 (2) 式的一切整数解的表示式是：

$x = -bk, y = ak$，其中 k 是任意整数。

证：　将 (2) 式移项为

$$ax = -by \tag{3}$$

因为 $(a,b) = 1$，故有 $a|y$ 和 $b|x$，由于 $a|y$ 和 $b|x$，得到

$$y = am, \quad x = -bn \tag{4}$$

其中 m 和 n 是整数，以 (4) 代入 (3) 得：

$-abn = -bam$，故 $n = m$，由于 $n = m$，可令

$k = n = m$，以 $k = n = m$ 代入 (4) 式得：

$$x = bk, \quad y = ak \tag{5}$$

以(5)代入(3)得：

$$abk = bak \tag{6}$$

由(6)式得知，(5)是(3)的整数解，并由(6)式同时得知，当取 k 等于任意整数时，都能满足(3)式，故(5)是(2)式的一切整数解的表示式，而 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots$，并由(5)式得知，(2)式的一切整数 x，都是 b 的倍数，同理，一切整数 y 都是 a 的倍数。

第二节　常数项 M 等于 0 以外的整数的时候

再讨论(1)式中，M 等于 0 以外的情况

(一) 当 $a|M$ 或 $b|M$ 的时候

(1)式中，如果 $a|M$，则容易得到(1)式有一组整数解是：$x = \frac{M}{a}$，$y = 0$，那么，(1)式的一切整数解呢？因为 $a|M$，故有 $av = M$，v 是整数，将 $av = M$ 代入(1)式得：$ax - by = av$，移项为：

$$a(x - v) = by \tag{7}$$

由(7)式和第一节引理得到：$y = ak$，$x = v + bk$。

同理　(1)式中，如果 $b|M$，则有 $bv' = M$，v' 是整数，也可以由第一节引理得到 $x = bk$，$y = v' + ak$，k 是任意整数。

(二) 当 $M = c + d$，而 $a|c$ 和 $b|d$ 的时候

(1)式中，如果 $M = c + d$，c 和 d 也是整数，当 $a|c$，$b|d$ 时，则(1)式的一切整数解的表示式是：

$$x = \frac{c}{a} + bk, \quad y = -\frac{d}{b} + ak$$

证：　由于 $a|c$ 和 $b|d$，故有

$$an = c, \quad bm = d \tag{8}$$

n 和 m 也是整数，将(8)式代入(1)式得：

$ax - by = c + d = an + bm$，移项得：

$$a(x - n) = b(y + m) \qquad (9)$$

由第一节引理和(9)式可得到：

$$x = n + bk \qquad y = -m + ak \qquad (10)$$

由(8)式得 $n = \frac{c}{a} \qquad m = \frac{d}{b}$ (11)

将(11)式代入(10)式得：$x = \frac{c}{a} + bk \quad y = -\frac{d}{b} + ak$，$k$ 是任意整数。

（三）辗转相除法的原理

当(1)式有 $0 < M < b < a$ 的时候，或兼有适合(一)或(二)的条件的时候，虽可以用(一)或(二)的引理求解，但是如果 a、b、M 数位多【即数值大】要把 M 分为适当的 c 和 d，就很困难，我们假设 $(a,b) = 1$，根据辗转相除的原理，当 $a > b$ 时，可得 $a = bq_1 + r_1$，q_1 是整数，以下 $q_2, q_3 \cdots\cdots$ 也是整数，r_1 余数，以下 $r_2, r_3, \cdots\cdots$ 也是余数。当 $b > r_1$ 时，可得 $b = r_1q_2 + r_2, \cdots\cdots$ 这样辗转相除下去，必然有 $r_{n-1} = r_nq_{n+1} + r_{n+1}$，并且 $r_{n+1} = 0$，n 表示 $1,2,3,\cdots n$，因为 $(a,b) = 1$，故 $r_n = 1$，又因为 $(a,b) = (b,r_1)$，$(b,r_1) = (r_1,r_2)$，$\cdots$，$(r_{n-2},r_{n-1}) = (r_{n-1},r_n)$ 和 $r_n = 1$，故有 $(r_{n-2},r_{n-1}) = r_n$，因为 $(r_{n-2},r_{n-1}) = r_n$，故有 $r_{n-2} - r_{n-1}q_n = 1$，又由于 $r_{n-2} - r_{n-1}q_n = 1$，则必有 $r_{n-3}x_1 - r_{n-2}y_1 = 1$ 又由于 $r_{n-3}x_1 - r_{n-2}y_1 = 1$，则必有 $r_{n-4}x_2 - r_{n-3}y_2 = 1$，$x_1, x_2, \cdots, y_1, y_2, \cdots$ 都是整数，这样逆推上去，则必有 $ax - by = 1$，故得知，当 $(a,b) = 1$ 时，则必有 x 和 y 两个整数满足

$ax - by = 1$。

如果(1)式中，a 和 b 两数不互素的时候，则有 $(a,b) = d > 1$，那么，经过辗转相除，必然有 $r_n = d$，因此，必然有 $ax' - by' = d$，由此可知，只有 $d \mid M$，(1)式才有整数解。

证： 因为$(a,b)=d$，则有$a=a_1d$，$b=b_1d$，将其代入(1)式得 $a_1dx-b_1dy=M$

即 $d(a_1x-b_1dy)=M$ (12)

在(12)式中，$(a_1,b_1)=1$，如果M不为d整除，显然(12)式就没有整数解，这也和$5x=12$一样，12不为5整除，故没有整数解。由此得知，(1)式中，如果$(a,b)=1$，则无论M等于任何整数，(1)式都有整数解，如果$(a,b)=d$，则只有$d|M$时，(1)式才有整数解。

（四）关于不定方程$ax-by=M$式的一切整数解的表示式的推理

假设(1)式$(a,b)=1$，【不然的话，由$(a,b)=d>1$，可将(1)式的两端，同时约以d，得到$\frac{a}{d}x-\frac{b}{d}y=\frac{M}{d}$，而$\frac{a}{d}$、$\frac{b}{d}$、$\frac{M}{d}$都是整数，故可以假设$(a,b)=1$】现在如果已知(1)式的一组整数解为：$x=MA$，$y=MB$，则它的一切整数解可由下式表示出来：

$$x=MA+bk,\quad y=MB+ak$$

k是任意整数，即$k=0$，±1，±2，……

证： 因为$x=MA$，$y=MB$是(1)式的一组整数解，所以有

$aMA-bMB=M$ (13)

由(13)式和(1)式得到 $ax-by=aMA-bMB$，移项整理得

$$a(x-MA)=b(y-MB) \tag{14}$$

由第一节引理和(14)式可得到：

$$x=MA+bk,\quad y=MB+ak$$

故(四)的引理得证。

（五）辗除横式的讨论

根据以上各点的引证，得知(1)式的演解程序是，首先要求出$aA-bB=1$式中的A和B，然后再求出(1)式整数解x和y，但是

要求出 A 和 B 却要借助于辗转相除法，如果(1) 式中 M 等于 1，则把 a，b 两数辗转相除，直至最后的余数等于 1，但如果 M 大于 1，那么，在辗转过程中，当出现的余数 r_1，$r_2\cdots$，其中轮序所得的余数 r_i，恰好能整除 M 时【这里 $i=1,2,3\cdots\cdots i$】则可以求出(1) 式的整数解，而不必再继续辗转相除，以免浪费时间，因此，分别讨论于下：

§1. 先讨论 $aA \quad bB \doteq r_1$ (15)

为了方便起见，将 a，b 二数辗转相除的过程写成如下行式，暂叫辗除行式：

$$a \quad b \quad \overline{q_1} \quad r_1 \qquad 表示\ a \quad bq_1 - r_1 \tag{V}$$

【说明】辗除行式分为三部分，即左数、中间数、右数，有左右二横线，左横线上的数，表示乘左数，右横线上的数，表示乘中间数，辗除行式每行的示意是：左横线上的数乘左数，其乘积除以中间数，将取得的不完全商写在右横线上，右数为余数，因此，(15)式可用辗除行式表示为：

$$a \ \overline{\quad A \quad}\ b \quad B \quad r_1 \tag{H}$$

将以上(H) 式和(V) 式对照，可得到(15) 式中：

$$A-1 \qquad B \quad q_1$$

由 r_1 M 和(四) 的引理，故得到(1) 式(指只须辗除一次，而余数 r_1 恰好能除尽 M) 的一切整数解的表示式：

$$x-\frac{AM}{r_1}+bk=\frac{M}{r_1}+bk$$

$$y-\frac{BM}{r}+ak-\frac{q_1M}{r_1}+ak$$

$$k-0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots\cdots$$

§2. 再讨论 $aA - bB \quad r_2$ (16)

(16) 式表示(1) 式要辗除二次，即有 r_2 M

辗除行式是：

$$a \ \overline{\ 1\ }\ b \ \overline{\ q_2\ }\ r_1 \qquad 表示\ a \quad q_2b - r_1 \tag{①}$$

$b \xrightarrow{\quad 1 \quad} r_1 \xrightarrow{\quad q_1 \quad} r_2$ 表示 $b - q_1 r_1 = r_2$ ②

将①式代入②式得：$b - (a - q_2 b)q_1 = r_2$

将上式整理得： $b(1 + q_2 q_1) - q_1 a = r_2$

将上式的二边同时乘以 -1 得：

$q_1 a - b(1 + q_2 q_1) = -r_2$

将上式用辗除行式的形式写成：

$$a \xrightarrow{\quad q_1 \quad} b \xrightarrow{\quad 1 + q_2 q_1 \quad} -r_2 \qquad (V_1)$$

注意：由于以上演解和整理，又因二边同时乘以 -1，所以上式【辗除行式】的右数是 $-r_2$

将(16)式用辗除行式的形式写成：

$$a \xrightarrow{\quad A \quad} b \xrightarrow{\quad B \quad} -r_2 \qquad (H_1)$$

将以上(V_1)和(H_1)对照，可得到(16)式中：$A = q_1$ $B = 1 + q_2 q_1$，由 $-r_2 | M$ 和(四)的引理，得到(1)式【指经过二次辗除而有 $r_2 | M$】的一切整数解的表示式为：

$$x = \frac{AM}{-r_2} - bk = -\frac{q_1 M}{r_2} + bk$$

$$y = -\frac{BM}{-r_2} + ak = \frac{(1 + q_2 q_1)M}{r_2} + ak$$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

§3. $aA - bB = r_3$ (17)

(17)式表示(1)式要辗除三次，即有 $r_3 | M$

辗除行式是：

$a \xrightarrow{\quad 1 \quad} b \xrightarrow{\quad q_3 \quad} r_1$ 表示 $a - q_3 b = r_1$ ③

$b \xrightarrow{\quad 1 \quad} r_1 \xrightarrow{\quad q_2 \quad} r_2$ $b - q_2 r_1 = r_2$ ④

$r_1 \xrightarrow{\quad 1 \quad} r_2 \xrightarrow{\quad q_1 \quad} r_3$ $r_1 - q_1 r_2 = r_3$ ⑤

将④式代入⑤式得：$r_1 - (b - q_2 r_1)q_1 = r_3$ ⑥

将③式代入⑥式得：$a - q_3 b - [b - (a - q_3 b)q_2]q_1 = r_3$

整理得：$a(1+q_2q_1) - b(q_3+q_1+q_3q_2q_1) = r_3$

将上式用辗除行式的形式写成：

$$a \underline{\quad 1+q_2q_1 \quad} b \underline{\quad q_3+q_1+q_3q_2q_1 \quad} r_3 \qquad (V_2)$$

将(17)式用辗除行式的形式写成：

$$a \underline{\quad A \quad} b \underline{\quad B \quad} r_3 \qquad (H_2)$$

将以上(V_2)式和(H_2)式对照，可得到(17)式中：

$$A = 1+q_2q_1 \qquad B = q_3+q_1+q_3q_2q_1$$

由$r_3 \mid M$和(四)的引理，得到(1)式【指经过辗除二次而有$r_3 \mid M$】的一切整数解的表示式为：

$$x = \frac{AM}{r_3} + bk = \frac{(1+q_2q_1)M}{r_3} + bk$$

$$y = \frac{BM}{r_3} + ak = \frac{(q_3+q_1+q_3q_2q_1)M}{r_3} + ak$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

现在，我们把§2. 讨论的(16)式的辗除行式：

$$a \underline{\quad 1 \quad} b \underline{\quad q_2 \quad} r_1$$

$$b \underline{\quad 1 \quad} r_1 \underline{\quad q_1 \quad} r_2$$

和由它演解成的一行式：

$$a \underline{\quad q_1 \quad} b \underline{\quad q_2q_1+1 \quad} -r_2$$

来对照，从中找出一个容易计算的演算法。由对照得知，在(16)式中，其$A=q_1$，就是辗除过程第二行右横线上的数q_1，其$B=1+q_2q_1$，就是辗除过程，第一行右横线上的数q_2乘第二行右横线上的q_1，其乘积再加上第二行左横线上的数1，其右数$-r_2$，就是取第二行的右数，但要由正号改为负号，这是因为演算过程，原来是$b(1+q_2q_1) - q_1a = r_2$，为了方便起见，用-1乘二边使成为$q_1a - b(1+q_2q_1) = -r_2$的原故，由此得知，将辗除二行式演成一行式时，$A$和$B$的计算是：$A=q_1$【即取第二行右横线上的数】$B=q_2q_1+1$【即

第一、第二行右横线上的数的乘积加第二行左横线上的数之和】

以上由二行式演变成一行式的演算法，暂叫辗除行式缩减法。根据这个缩减法的引理，辗除三行式也可演变成一行式，以(17)式为例：

$$a \overset{1}{\text{———}} b \overset{q_3}{\text{———}} r_1$$

$$b \overset{1}{\text{———}} r_1 \overset{q_2}{\text{———}} r_2$$

$$r_1 \overset{1}{\text{———}} r_2 \overset{q_1}{\text{———}} r_3$$

先将以上三行式的后二行，即□方格内的二行演成以下方格内的一行：

$$a \overset{1}{\text{———}} b \overset{q_3}{\text{———}} r_1$$

$$b \overset{A_1}{\text{———}} r_1 \overset{B_1}{\text{———}} r_3$$

由辗除行式缩减法得到：$A_1 = q_1$　$B_1 = q_2q_1 + 1$，并取右数为 $-r_3$，故得：

$$a \overset{1}{\text{———}} b \overset{q_3}{\text{———}} r_1$$

$$b \overset{q_1}{\text{———}} r_1 \overset{q_2q_1+1}{\text{————}} -r_3$$

再将以上这个二行式，演成一行式：

$$a \overset{A}{\text{———}} b \overset{B}{\text{———}} r_3$$

由辗除行式缩减法得到：$A = q_2q_1 + 1$、$B = q_3(q_2q_1 + 1) + q_1$，并取右数再改变符号为 r_3，故得：

$$a \overset{q_2q_1+1}{\text{————}} b \overset{q_3(q_2q_1+1)+q_1}{\text{——————}} r_3$$

由此得知，一切辗除多行式，都可用辗除行式缩减法递次演成最后如下的形式的一行式：

$$a \overset{A}{\text{———}} b \overset{B}{\text{———}} \pm r_n$$

这时，如果 n 是奇数，以上这个辗除行式的右数取 r_n【奇】，如果 n 是偶数，则取 $-r_n$【偶】

§4.　图阶求 A、B 法

为了计算简速起见，将 a、b 二数辗转相除过程写成辗除多行式，再按这个多行式绘出图阶，用辗除行式缩减法，求出 A 和 B，例如：

$$a \underline{\quad h_n \quad} b \underline{\quad q_n \quad} r_1$$

$$b \underline{\quad h_{n-1} \quad} r_1 \underline{\quad q_{n-1} \quad} r_2$$

$$r_1 \underline{\quad h_{n-2} \quad} r_2 \underline{\quad q_{n-2} \quad} r_3$$

……………………………

$$r_{n-2} \underline{\quad h_1 \quad} r_{n-1} \underline{\quad q_1 \quad} r_n$$

自然整数辗转相除时，因为一般没有倍左的情况，故左横线上的数 $h_1, h_2, \cdots\cdots$ 都是 1，【当然，如果有倍左时，就要如实写上，以后再专题讨论这个"倍左"问题】

将以上辗除多行式写成如下图阶：

图阶一［没有倍左的图阶］

$$q_n \mid q_n k_{n-1} + k_{n-2} = k_n$$

$$q_{n-1} \mid q_{n-1} k_{n-2} + k_{n-3} = k_{n-1}$$

………………………………

$$q_3 \mid q_3 k_2 + k_1 = k_3$$

$$q_2 \mid q_2 k_1 + k = k_2$$

$$q_1 \mid q_1 = k_1$$

$$1 = k$$

图阶二（有倍左的图阶）

	h_n	q_n	$q_nk_{n-1}+h_{n-1}k_{n-2}=k_n$
h_{n-1}	q_{n-1}		$q_{n-1}k_{n-2}+h_{n-2}k_{n-3}=k_{n-1}$

……………………………………

		h_3	q_3	$q_3k_2+h_2k_1=k_3$
	h_2	q_2		$q_2k_1+h_1k=k_2$
h_1	q			$q=k$
	1			$1=k$

故有： $a=\frac{A-k_{n-1}b}{B-k_n}\pm r_n$

以上是没有倍左的辗除多行式缩减成最后的一行式，

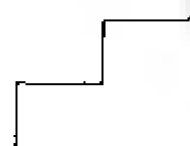
$$a=\frac{A-h_nk_{n-1}b}{B-k_n}\pm r_n$$

以上是有倍左的辗除多行式缩减成最后的一行式。

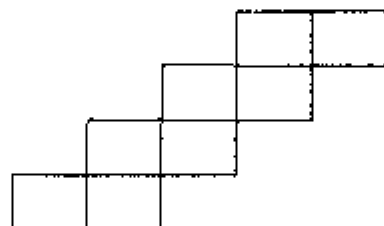
（六）图阶填写及计算法

1. 先绘图阶：

没有倍左的图阶：



需要倍左的图阶：



2. 将辗除多行式各行左右横线上的数 q_1, q_2……；h_1, h_2……，仿图阶一或图阶二填写，最低阶下写 1；

3. 用缩减法的计算式【即以上图阶内的公式：$k_n = q_n k_{n-1} + k_{n-2}$，或 $k_n = q_n k_{n-1} + h_{n-1} k_{n-2}$】由下而上递次计算填入图阶内；

4. 写完图阶内各数后，取最上阶内之数即 k_n，又取【由上而下】下一阶内之数即 k_{n-1}，分别为缩减成一行式时右横线上的 B 数和左横线上的 A 数，如果辗除多行式第一行左横线上有倍左数 h_n，则 $A = h_n k_{n-1}$；

5. 取右数 r_n 时【指缩减成最后一行式的右数】要注意区别 n 是奇数或偶数而写上正号或负号。

第三节　递次用辗除横式的右数【即余数 r】去除尽 M 的演解法

现在，我们假设(1)式中，$M = M_1 + M_2 + \cdots\cdots M_n$，如果我们已分别求得以下各式的整数解为：

$$x_1, y_1,\quad x_2, y_2,\quad x_3, y_3,\quad \cdots\cdots,\quad x_n, y_n,$$

即

$$ax_1 - by_1 = M_1 \qquad ⑦$$

$$ax_2 - by_2 = M_2 \qquad ⑧$$

$$ax_3 - by_3 = M_3 \qquad ⑨$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$ax_n - by_n = M_n \qquad ⓝ$$

那么，由 ⑦ + ⑧ + ⑨ + …… + ⓝ 得到

$$a(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots\cdots x_n) - b(y_1 + y_2 + y_3 + \cdots\cdots + y_n) = M \qquad (18)$$

由本章第二节(四)的引理和(18)式得到(1)式的一切整数解的表示式为：

$$x = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots\cdots + x_n + bk$$

$$y = y_1 + y_2 + y_3 + \cdots\cdots y_n + ak$$

$$k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \cdots\cdots$$

根据以上道理,(1)式有以下解法:

解: $ax - by = M$

辗除行式:

$$a \overset{1}{\longrightarrow} b \overset{q_n}{\longrightarrow} r_1 \qquad ⑩$$

将以上一行式的右数 r_1 去除 M(即 M 除以 r_1),取不完全商 s,余数为 $M - Sr_1$。

继续辗除

$$b \overset{1}{\longrightarrow} r_1 \overset{q_{n-1}}{\longrightarrow} r_2 \qquad ⑪$$

$$r_1 \overset{1}{\longrightarrow} r_2 \overset{q_{n-2}}{\longrightarrow} r_3 \qquad ⑫$$

将以上行式右数 r_3 去除 $M - sr_1$,取不完全商 t,余数为 $M - sr_1 - tr_3$

继续再辗除

……………………………………

$$r_{n-2} \overset{1}{\longrightarrow} r_{n-1} \overset{q_1}{\longrightarrow} r_n$$

将以上行式右数 r_n 去除 $M - sr_1 - tr_3$,取商 w,余数为0,表示 M 已被除尽,然后,按图阶计算 A 和 B。

由 ⑩ 式得: $a \overset{1\times s}{\longrightarrow} b \overset{q_n s}{\longrightarrow} r_1 s$

由 ⑩⑪⑫ 式得: $a \overset{A_1 t}{\longrightarrow} b \overset{B_1 t}{\longrightarrow} r_3 t$

由 ⑩⑪⑫……ⓝ 得: $a \overset{A_n w}{\longrightarrow} b \overset{B_n w}{\longrightarrow} \pm r_n w$

故得到(1)式的一切整数解的表示式为:

$$x = 1 \times s + A_1 t \pm A_n w + bk$$

$$y = q_n s + B_1 t \pm B_n w + ak$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots$$

以上 A_1 和 B_1 是由辗除三行式用图阶计算法算出来的数,A_n 和 B_n 是由辗除 n 行式用图阶计算法算出来的数。

第四节　辗除横式中的倍左问题及其应用

我们在图阶求 A、B 法中，曾说过，如果某辗除行式，它的左横线上的数不是 1，而是 h 时，就是说有时候，要把一个整数 h 去乘左数 a，就可以使辗除加快【或顺利】进行下去，那何乐而不为呢？这就是倍左问题，现在就来讨论这个问题。

(1) 式在辗除行式

$$a \qquad b$$

中，把一个除 0 和 1 以外的整数 h 去乘左数，叫做倍左，即

$$a \overset{h}{—} \quad b$$

这时，若 h 使得 $(ah,b)|M$，则这个 h 是可以用来倍左的。

证：　当 $h > b$ 时，取 $h = h_1 + bv$，v 是整数，是 h 除以 b 取不完全的商，h_1 为余数。

1. 如果 h 等于 bv，即 h_1 等于 0，由第二节(一)的引理，即(1)式只有 M 为 b 整除时，才能取 x 等于 0，故以 b 的倍数去倍左，没有意义；

2. 如果 h 和 b 互素，则由第二节(一)的引理和 $(h,b)=1$，而得到 $(ah,b)|M$，故知凡是和 b 互素的整数都可用来倍左；

3. 如果 $(a,b)=1$，而 b 是合数，即有：

设 $b = p_1p_2p_3\cdots\cdots p_n$　　　p 为素数

故有 $b = p_1D_1$　　而 $D_1 = p_2p_3\cdots\cdots p_n$

$b = p_2D_2$　　而 $D_2 = p_1p_3\cdots\cdots p_n$

……………………………………

$b = p_nD_n$　　而 $D_n = p_1p_2p_3\cdots\cdots p_{n-1}$

如果取 $h_1 = p_1c$，则有 $(ah_1,b) = p_1$

c 是除 $p_1p_2,\cdots\cdots p_n$ 和这些素数的倍数以外的整数

如果取 $h_2 - p_2c$　　则有 $(ah_2, b) - p_2$

……………………………………………………

这时，如果 $p_1 \nmid M$，则不可取 h_1 倍左，

如果 $p_2 \nmid M$，则不可取 h_2 倍左，

如此等等，

由以上三点得知，在辗除行式中，用以倍左之数，是不随便选取的。

附：用倍左法解不定方程【代数多项式】一例：

设题：$(x^3 + 4x)A - (2x^2 + 5)B - 3x \quad 15$　　⑬

题中 A 和 B 是要求的数

由 ⑬ 式看，有 $a \quad x^3 + 4x$，$b - 2x^2 + 5$，$M \quad 3x - 15$，辗除行式是

$$x^3 + 4x \overset{2}{\text{——}} 2x^2 + 5 \overset{x}{\text{——}} 3x \qquad ⑭$$

将 ⑭ 式的右数去除 M，取不完全商 1，余数为 -15，继续辗除

$$2x^2 + 5 \overset{3}{\text{——}} 3x \quad \overset{2x}{} \quad 15 \qquad ⑮$$

将 ⑮ 式的右数去除 M 的余数　15，取商　1，因这行属第二列应改变符号为 1，M 已被除尽。

注：这一行以 3 去倍左，3 是 b【指 $3x$】的因数，本不能倍左，但因倍左后有 $(3(2x^2 + 5), 3x) \quad 3 \quad 15$，适合本节第 3 点引理，故可以用 3 倍左。

由 ⑭ 得到　$a - 2 \times 1$　b　$x \times 1$　$3x$

由 ⑭⑮ 二行式有：$h_1 - 3$，$h_2 \quad 2$

由 ⑭⑮ 二行式有图阶：

	h_2	q_2	$k_2 = q_2k_1 + h_1k$
h_1	q_1	q_1	k
	1	k	

代入得：

	2	x	$k_2 = 2x^2 + 3\times 1$
3	2x	$2x = k_1$	
1	k		

由图阶计算得：　$a = k_2k_1 - 2\times 2x$　$b = k_2 = 2x^2 + 3$　-15

⑯

由 ⑭ 式得：　$A_1 = 2$，　$B_1 = x$
由 ⑯ 式得：　$A_2 = 4x$，　$B_2 = 2x^2 + 3$　⑰

由本章第二节(四)的引理、第三节演解法和 ⑰ 式，得到不定方程多项式 ⑬ 中：$A = 4x + 2 + bk$

$$B = 2x^2 + x + 3 + ak$$

其中 k 是任意整数或任意多项式。

第五节　另一形式的二元一次不定方程的整数解

(一)

$$ax + by + cxy = M \qquad (19)$$

假设(19) 式可以分解成如下的因式：

$$(d_1x + m_1)(d_2y + m_2) = 0 \qquad (20)$$

以上 d_1, d_2, m_1, m_2 都是整数。

1. 如果 $d_1 | m_1, d_2 \nmid m_2$，则(20) 式的整数解为：

$$x = -\frac{m_1}{d_1} \qquad y = k$$

2. 如果 $d_1 \nmid m_1, d_2 | m_2$，则(20) 式的整数解为：

$$x = k \qquad y = -\frac{m_2}{d_2}$$

3. 如果 $d_1 | m_1, d_2 | m_2$，则(20) 式有二组整数解：

$$\begin{cases} x = -\dfrac{m_1}{d_1} \\ y = k \end{cases} \qquad \begin{cases} x = k \\ y = -\dfrac{m_2}{d_2} \end{cases}$$

4. 如果 $d_1 \nmid m_1, d_2 \nmid m_2$，则(20)式没有整数解。

证： 由(20)式得：

$$d_1 d_2 xy + d_1 m_2 x + d_2 m_1 y + m_1 m_2 = 0 \qquad (21)$$

将(21)改写成：$d_1 x(d_2 y + m_2) + m_1(d_2 y + m_2) = 0 \qquad (22)$

将(22)式约去 $d_2 y + m_2$ 得：

$$d_1 x + m_1 = 0 \qquad 即\ x = -\frac{m_1}{d_1} \qquad (23)$$

以(23)式代入(21)式得：

$$d_2 m_1 y - m_1 m_2 + d_2 m_1 y + m_1 m_2 = 0$$

将上式消去 $m_1 m_2$，留下 $d_2 m_1 y = d_2 m_1 y$

故 $y = k$，k 是任意整数

又将(21)改写成：

$$d_2 y(d_1 x + m_1) + m_2(d_1 x + m_1) = 0 \qquad (24)$$

将(24)式约去 $d_1 x + m_1$ 得：

$$d_2 y + m_2 = 0 \qquad 即\ y = -\frac{m_2}{d_2} \qquad (25)$$

以(25)式代入(21)式得：

$$d_1 m_2 x + d_1 m_2 x - m_1 m_2 + m_1 m_2 = 0$$

将上式消去 $m_1 m_2$，留下 $d_1 m_2 x = d_1 m_2 x$

故 $x = k$，k 是任意整数

由以上得到，可以以(23)式和(25)式为依据。

如果 $d_1 \mid m_1, d_2 \nmid m_2$，则(20)式只有一组整数解，即第1点；

如果 $d_1 \nmid m_1, d_2 \mid m_2$，则(20)式只有一组整数解，即第2点；

如果 $d_1 \mid m_1, d_2 \mid m_2$，则(20)式有二组整数解，即第3点；

如果 $d_1 \nmid m_1, d_2 \nmid m_2$，则(20)式没有整数解；

故本节之(一)的引理得证。

(二)

假设(19)式中,$(a,b,c) = 1$,则(19)式有以下的解法:

解: 由(19)式得: $ax + cxy = M - by$

即 $x(a + cy) = M - by$ (26)

也可以由(19)式得: $by + cxy = M - ax$

即: $y(b + cx) = M - ax$ (27)

因为(26)式和(27)式都是由(19)式得来的,故只要求出其中一式的整数解就行了。

现在只讨论(26)式的整数解。

假设(26)式有整数解,则 $a + cy$【当做一个整数】必能整除 $M - by$【也当做一个整数】,由于 $a + cy \mid M - by$,则必有 $(M - by, a + cy) = a + cy$,因此,有以下引理:

设 a 和 b 都是整数,当 $a = qb$ 时【即 a 是 b 的倍数时】,有 $(a,b) = b$,于是可作以下辗除行式,【条件是不取 $r_i = 0$】

$$a \xrightarrow{1} b \xrightarrow{q+1} b, \quad (r_1)$$

$$b \xrightarrow{1} b \xrightarrow{1} 2b, \quad (r_2)$$

$$b \xrightarrow{1} 2b \xrightarrow{1} 3b, \quad (r_3)$$

$$2b \xrightarrow{1} 3b \xrightarrow{1} b, \quad (r_4)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \pm vb, \quad (r_n)$$

从以上这个辗除多行式看,其中 r_i【$i = 1,2,3,\cdots\cdots,t$】有时 $b_i = r_i$,有时 r_i 是 b 的倍数,但可以肯定 r_i 是 $|b|$ 的倍数,故有

$r_n = bs$ s 是整数

设 r_n 的标准分解式为:

$$r_n = p_1 p_2 \cdots p_n$$

令：$t_1 = p_2p_3\cdots p_n$

$t_2 = p_1p_3\cdots p_n$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$t_n = p_1p_2\cdots p_{n-1}$

得到：$r_n = bs = p_1t_1 = p_2t_2 = \cdots = p_nt_n$

由此有：$t_1, t_2, t_3, \cdots, t_n, p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ (28)

都是 r_n 的因数。

故当：$s = 1$ 时，则 $b = r_n$

$s = p_1$ 时，则 $b = t_1$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$s = p_n$ 时，则 $b = t_n$

由(28)式和 r_n 是 b 的倍数，故可以把它们立成方程式：

$b = \pm 1, b = \pm t_1, b = \pm t_2, \cdots, b = \pm t_n$

$b = \pm p_1, b = \pm p_2, b = \pm p_3, \cdots, b = \pm p_n, b = \pm r_n$ (29)

由于以上这个引理，因此，(26)式有以下辗除行式：

$M - by \overline{\quad} a + cy \quad \overline{q_n} \quad r_1$

$a + cy \quad r_1 \quad \overline{q_n} \quad r_2$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$r_{n-2} \overline{\quad} r_{n-1} \overline{\quad} r_n$

如果以上辗除多行式中的 $r_1, r_2, \cdots\cdots$ 直至 r_{n-1}，都是多项式，而 r_n 是一个不等于0的单项常数，【如果 $r_n = 0$，那就一定是属于(20)式所讨论的范围了】由以上这个辗除多行式，我们得到 $a + cy$ 必等于 r_n 的一个因数或若干个因数，因此，把 r_n 的全部因数逐个和 $a + cy$ 写成以下方程：

$a + by = \pm 1, \pm t_1, \pm t_2, \cdots \pm t_n, \pm p_1, \pm p_2, \cdots \pm p_n, \pm r_n$ (30)

在(30)式中，求出所有的整数解 y，再在这些 y 中，筛选出所有满足 $x = \dfrac{M - by}{a + cy}$ 式者，它们都是(26)式的整数解，因而也是(19)式

的整数解。如果在(30)式中,没有 y 的整数解,则(19)式也没有整数解。

例: 求 $6x + 25y + 7xy = 18$ 的整数解

解: 原式 $\Rightarrow x(6 + 7y) = 18 - 25y$

即 $x = \dfrac{18 - 25y}{6 + 7y}$

由本节引理有以下辗除行式

$18 - 25y \quad 6 + 7y \quad \xrightarrow{-3} \quad 36 - 4y$

$6 + 7y \quad 36 - 4y \quad \xrightarrow{1} \quad -42 + 3y$

$36 - 4y \quad -42 + 3y \quad \xrightarrow{-1} \quad 78 - y$

$42 + 3y \quad 78 - y \quad \xrightarrow{3} \quad 276$

276 的因数:± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 12, ± 23,

± 46, ± 69, ± 92, ± 138, ± 276。

选得:$6 + 7y = -1$,则 $y = -1$

$6 + 7y = 6$,则 $y = 0$

$6 + 7y = 69$,则 $y = 9$

$6 + 7y = -92$,则 $y = -14$

将 $y = -1$,代入 $x = \dfrac{18 - 25y}{6 + 7y}$ 解得 $x = -43$

将 $y = 0$,代入 $x = \dfrac{18 - 25y}{6 + 7y}$ 解得 $x = 3$

将 $y = 9$,代入 $x = \dfrac{18 - 25y}{6 + 7y}$ 解得 $x = -3$

将 $y = -14$,代入 $x = \dfrac{18 - 25y}{6 + 7y}$ 解得 $x = -4$

故本例题有四组整数解,即:

$\begin{cases} x_1 = -43 \\ y_1 = -1 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_3 = -3 \\ y_3 = 9 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x_4 = -4 \\ y_4 = -14 \end{cases}$

习　题

1. 用辗转相除横式判断下列不定方程有否整数解：

(1)$38x \quad 24y - 13$

(2)$51x \quad 39y - 4$

(3)$121x + 11y - 728$

2. 用第五节讨论的方法判断下列不定方程有否整数解：

(1)$9x + 6xy \quad 10y \quad 15$

(2)$21x \quad 12xy \quad 4y + 7 - 0$

3. 求下列不定方程的整数解：

(1)$5x \quad 3y \quad 0$

(2)$12x \quad 7y \quad 5$

(3)$13x \quad 11y - 1$

(4)$17x \quad 8y \quad 36$

(5)$8x + 5y - 59$

(6)$5x + 2xy - 3y - 4$

(7)$3x + 2xy + 13y - 23$

4. 有一个二位数，左数比右数大 3，此数如加 6，则等于 13 的倍数，求此数。

5. 有个二位数，这数如加 3，等于 3 的倍数，如再加 5，等于 5 的倍数，如又再加 7，等于 7 的倍数，求这个二位数。

6. 小刘把若干粒棋子，放入横直小格数相同的四方形大格图，先放入一个小格数较多的图，则棋子尚差 11 粒才能放满图中的小格，如将棋子重新放入小格数较少的图，则剩下棋子 6 粒，问小刘的棋子是多少粒？

7. 有一个多项式，若以 $3x + 5$ 除之，余数为　1，若以 $2x + 3$ 除之，余数为 1，求这个多项式。

8. 有一个首项为$6x^4$，末项为20的多项式，若除以x^2+5，余数为$4x$，若除以$3x+2$，余数为$x-2$，求这个多项式。

9. 有一个首项为$13x^3$，末项为23的多项式，若除以$3x^2+2x+7$式，则余式为x^3+x^2+2，若除以$4x+5$式，余式为x^3-x^2+x-12，求这个多项式。

第二章　三元一次不定方程

求不定方程

$$ax+by+cz=M \tag{1}$$

式的一切整数解。其中M是给定的整数

解：　令$ax+by=\overline{W}$　(2)

$\overline{W}$是整数，以(2)式代入(1)式得：

$$\overline{W}+cz=M \tag{3}$$

由第一章第二节(四)的引理，得到(3)式的一切整数解为：

$$\overline{W}=M+ck,\ Z=-k$$

由第一章第二节(二)及(四)的引理，(2)式的一切整数解为：

$$x=\frac{A\overline{W}}{\pm r_n}+bv \qquad y=\frac{B\overline{W}}{\pm r_n}+av$$

将$\overline{W}=M+ck$代入$x=\frac{A\overline{W}}{\pm r_n}+bv$得：

$$x=\frac{A(M+ck)}{\pm r_n}+bv \tag{4}$$

又将$\overline{W}=M+ck$代入　$y=\frac{B\overline{W}}{\pm r_n}+av$得：

$$y=\left(\frac{B(M+ck)}{\pm r_n}+av\right) \tag{5}$$

$$z=-k \tag{6}$$

以上 k 和 v 是任意整数，A 和 B 是以 a 和 b 用辗除行式并经过图阶求 A、B 的缩减法求得的，因此(1)式的一切整数解可由(4)(5)(6)式表示出来。

习　题

1. 求下列不定方程的整数解：

(1) $3x + 4y + 5z = 22$

(2) $2x - 15y + 11z = 33$

2. 有一些三位数，数字之和的 19 倍，比数值大 9，求这些三位数。【数字不等于 0】

2. 某人百钱买百鸡，公鸡七钱三只，母鸡五钱四只，雏鸡二钱五只，求公鸡、母鸡、雏鸡各多少只？

3. 小华的爷爷今年的岁数恰巧是他出生那年的各位数字之和的 4 倍，小珠的爷爷 10 年前的岁数也是出生那年的各位数字之和的 4 倍，问这二位爷爷今年各多少岁？【今年指 1993 年】

5. 有些二位数【指正整数】这数如加 3 等于 3 的倍数，如再加 4，等于 4 的倍数，又如再加 5，等于 5 的倍数，求这些二位数。

6. 有个二位数【指正整数】，左数比右数大 6，这数如加 7，等于 5 的倍数，求这数。

7. 有个三位数【指正整数】，数字之和的 41 倍比数值少 7，求这数。

8. 有些二位数【指正整数】，其数值恰巧是这二数字的乘积的倍数，求这些二位数。

9. 某人把一捆树苗，栽到一块正方形地里，要求每株横直间隔相等，如果栽密些，则欠缺 15 株，如果栽疏些，则剩余 8 株，求树苗总数。

第三章　多元高次不定方程的探讨

从本章起，对一些多元高次不定方程的整数解，探求新的解法，并推导出解的表示式。

第一节　求证 $x^a = y^b$ 的正整数解

求证　　$x^a = y^b$　　(1)

式零以外的正整数解【本章第一、二、三节均简称“解”】由下式表示出来：

$x = k^b \quad y = k^a$　　(2)

其中 k 是任意正整数，a 和 b 是正整数，

$(a,b) = 1$

证：（1）式中，若 $(a,b) = d > 1$ 时，则有

$a = dE, b = dF$，【E、F 是正整数】

$\because \quad x^a = y^b \Rightarrow x^{dE} = y^{dF} \Rightarrow x^E = y^F$

而 $(E,F) = 1$，　$\therefore$ 可设 $(a,b) = 1$

由（1）式取 $[a,b] = m$，再取 k^m，（k 也是正整数）使其满足（1）式，即 $x^a = y^b = k^m$。由于 $x^a = y^b = k^m$，得到 $x = k^{\frac{m}{a}}$，$y = k^{\frac{m}{b}}$，由于 $(a,b) = 1$，和 $[a,b] = m$，得到 $ab = m$，故 $x = k^{\frac{ab}{a}} = k^b$，$y = k^{\frac{ab}{b}} = k^a$，将其代入（1）式验算无误，故（1）式的一切正整解可由（2）式表示出来。

第二节　求 $20x^3 = 21y^2$ 的正整数解

求：$20x^3 = 21y^2$　　(3)

式的解。

解： 因(3)式左右两端的系数是复合数，要将其进行标准分解，即：

$$20 = 2^2 \times 5$$

$$21 = 3 \times 7$$

得到它们的素因数：2，5，3，7。

令 x 和 y 都含有这些素数，并代入(3)式做如下的配方：

即 $20x^3 = 21y^2 \Rightarrow$

$$2^2 \times 5(2^a \times 5^b \times 3^c \times 7^d)^3 = 3 \times 7(2^e \times 5^f \times 3^g \times 7^h)^2 \quad (4)$$

(4)式括号内的指数 $a, b, \cdots\cdots$ 都是待定的正整数，经计算后，得到和(4)式括号内各指数的对应数如下：

$$2^2 \times 5(2^0 \times 5^1 \times 3^1 \times 7^1)^3 = 3 \times 7(2^1 \times 5^2 \times 3^1 \times 7^1)^2$$

因为 x 和 y 的方次数分别是 3 和 2，故(3)式解的表示式是：

$$\left.\begin{aligned} x &= 2^{0+2n_1} \times 5^{1+2n_2} \times 3^{1+2n_3} \times 7^{1+2n_4} \\ y &= 2^{1+3n_1} \times 5^{2+3n_2} \times 3^{1+3n_3} \times 7^{1+3n_4} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

其中 n_i 是任意给定的正整数，$i = 1, 2, 3, 4$

第三节 试证 $3x^4 = 2y^2$ 没有正整数解

试证： $3x^4 = 2y^2 \quad (6)$

式无解。

证： 由本章第二节引理和(6)式，我们有：

$$3x^4 = 2y^2 \Rightarrow$$

$$3(2^a \times 3^b)^4 = 2(2^c \times 3^d)^2 \quad (7)$$

(7)式中：

$\because \dfrac{4b+1}{2} = d$，而 $2 \nmid 4b+1$，得到 d 不是整数，

$\because \dfrac{2c+1}{4} = a$，而 $4 \nmid 2c+1$，得到 a 不是整数，

这和 a、b、c、d 都是整数发生矛盾，故(6)式无解。

第四节　求 $x^2-23y^2=257$ 的整数解

求不定方程：$x^2-23y^2=257$　　(8)

式的整数解【本节中，均简称“解”】

这是著名的裴尔方程，它的一般解法是：

先求适合 $r^2\equiv 23(mod 257)$ 的诸解，也就是在 $r^2=23+257h$，

$r^2\leqslant[\frac{257}{2}]^2=128^2$　　(9)

中求适当的 h，使 $23+257h$ 是一个平方数，令 h 经过 $0\leqslant h\leqslant\left[\frac{128^2}{257}\right]=63$ 逐一代入(9)式，就可以得到 $h=13$ 时，

$$r^2=3364，即\ r=58, h=13, \eta=+1,$$

故解方程(8)转化为解方程

$$x_1^2-23y_1^2=13 \qquad (10)$$

因 $13>\sqrt{23}$，故再求

$r_1^2=23+13h_1$ 的诸解，仿上法可得：

$$r_1=6,\quad h_1=1,\quad h_1\eta_1=\frac{6^2-23}{13}=1$$

故又转化为解方程

$$x_2^2-23y_2^2=1 \qquad (11)$$

再用连分(数)法解(11)，即：

$$\sqrt{23}=4+\sqrt{23}-4=4+\cfrac{1}{\frac{\sqrt{23}+4}{7}}=4+\cfrac{1}{\frac{4+4+\sqrt{23}-4}{7}}$$

$$=4+\cfrac{1}{1+\frac{\sqrt{23}-3}{7}}=4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{\sqrt{23}+3}{2}}}=4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{4+3+\sqrt{23}-4}{2}}}$$

$$= 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{3 + \sqrt{23} - 3}{2}}} = 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{23} + 3}{7}}}}$$

$$= 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\cfrac{4 + 3 + \sqrt{23} - 4}{7}}}} = 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\sqrt{23} - 4}{7}}}}$$

$$= 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{7}{\sqrt{23} - 4}}}}} = 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\sqrt{23} + 4}}}}$$

$$= 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + 4 + \sqrt{23} - 4}}}} = 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \sqrt{23} - 4}}}}$$

$$= 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{7}{\sqrt{23} + 4}}}}} = 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{23} + 4}{7}}}}}} \cdots$$

$= [4,\dot{1},3,1,8,]$

由以上连分数造表如下：

n	0	1	2	3	4	5						
a		4	1	3	1	8	1	3	1	8		
p	1	4	5	19	24	211						
Q	0	1	1	4	5	44						

注：$P_0=1, P_1=a_1, Q_0=0, Q_1=1$，

$P_i=a_ip_{i-1}+P_{i-2}, Q_i=a_iQ_{i-1}+Q_{i-2}$， $i=0,1,2\cdots n$

由以上连分数得知，$\alpha=\sqrt{23}=a_1+\frac{1}{\alpha_1}$

即 $a_1=4, \alpha_1=\frac{\sqrt{23}+4}{7}$，也即 $\frac{1}{\alpha_1}=\frac{7}{\sqrt{23}+4}$，

$a_2=1, \alpha_2=\frac{7}{\sqrt{23}-3}=\frac{\sqrt{23}+3}{2}$，也即 $\frac{1}{\alpha_2}=\frac{2}{\sqrt{23}+3}$，

$a_3=3, \alpha_3=\frac{\sqrt{23}+3}{7}$，也即 $\frac{1}{\alpha_3}=\frac{7}{\sqrt{23}+3}$，

$a_4=1, \alpha_4=\frac{7}{\sqrt{23}-4}=\sqrt{23}+4$，也即 $\frac{1}{\alpha_4}=\frac{1}{\sqrt{23}+4}$，

$a_5=8, \alpha_5=\frac{\sqrt{23}+4}{7}$，也即 $\frac{1}{\alpha_5}=\frac{7}{\sqrt{23}+4}$，

因此有 $x^2-23y^2=(-1)^n k$，k是$\frac{1}{\alpha_n}$的分子，

1. 当 $n=1$ 时，则 $x^2-23y^2=(-1)^1 7=-7$

   它的解为 $x=p_1=4$， $y=Q_1=1$，

2. 当 $n=2$ 时，则 $x^2-23y^2=(-1)^2 2=2$

   它的解为 $x=p_2=5$， $y=Q_2=1$，

3. 当 $n=3$ 时，则 $x^2-23y^2=(-1)^3 7=-7$

   它的解为 $x=p_3=19$， $y=Q_3=4$，

4. 当 $n=4$ 时，则 $x^2-23y^2=(-1)^4 1=1$

   它的解为 $x=p_4=24$， $y=Q_4=5$，

5. 当 $n=5$ 时，则 $x^2-23y^2=(-1)^5 7=-7$

   它的解为 $x=p_5=211$， $y=Q_5=44$，

故得到第4式，即$(x_2,y_2)=(24,5)$是(11)式的一组解，它的一切解为：$x_2+y_2\sqrt{23}=\pm(24+5\sqrt{23})^t$，$t$是正整数。

于是代入以下公式得到：

$$x=\frac{\eta_1\times 23y_2\pm r_1x_1}{\eta_1h_1}=\frac{-1\times 23\times 5\pm 6\times 24}{1}=29,\ -259,$$

$$y=\frac{\eta_1x_2\pm r_1y_2}{\eta_1h_1}=\frac{-1\times 24\pm 6\times 5}{1}=6,\ -54。$$

取$(x_1,y_1)=(29,6)$，则(10)式的一切解为：

$$x_1+y_1\sqrt{23}=\pm(24+5\sqrt{23})^t(29\pm 6\sqrt{23})$$

$$\text{或}\ \pm(24+5\sqrt{23})^t(259\pm 54\sqrt{23})$$

从而(8)式的一切解有：

$$1.\ x+y\sqrt{23}=\pm(24+5\sqrt{23})^t(29\pm 6\sqrt{23})(58\pm\sqrt{23})/13$$
$$=\pm(24+5\sqrt{23})^t(140\pm 29\sqrt{23})$$

$$2.\ x+y\sqrt{23}=\pm(24+5\sqrt{23})^t(6\pm\sqrt{23})(58\mp\sqrt{23})/13$$
$$=\pm(24+5\sqrt{23})^t(25\pm 4\sqrt{23})$$

其中t是正整数。

另一种新解法：

将(8)式移项为

$$x^2-257=23y^2$$

先解同余式

$$x^2\equiv 257(mod23)\Rightarrow x^2\equiv 4(mod23)\Rightarrow x\equiv 2,21(mod23)$$

即$x=\pm 2+23t,t=0,1,2,3,\cdots$

可造表如下：

t	0	1	2	3	4	5	6	……
$x=2+23t$	2	25	48	71	94	117	140	……
$h=\frac{x^2-257}{23}$	−11	16	89	208	373	584	841	……

注： 上表的计算方法是：第二行的每一项都是前一项加23，第三行从第二项起，每一项都是等于第二行同项加前项再加本行前项，即从左起周围三数之和，当第三行出现完全平方数时，就得到(8)式一个解，如(25,4)，(140,29)等等。若要求一切解，即仿此

方法再解

$$x^2-23y^2=1 \qquad (9)'$$

可得到(1,0),(24,5)是(9)′的解，从而得到(8)的一切解为：

1. $x+y\sqrt{23}=\pm(24+5\sqrt{23})^t(25\pm4\sqrt{23})$

2. $x+y\sqrt{23}=\pm(24+5\sqrt{23})^t(140\pm29\sqrt{23})$

第五节　关于 $x^2-dy^2=M$，$ax^2+bxy\pm cy^2=M$ 的整数解的讨论，其中 M 是给定的复合数

(一) $x^2-dy^2=M$ 　　(A)

1. (A)式中，当 $M=nm$ 时【包括 n、m 也可以是素数和合数】

若已知 $x_1^2-dy_1^2=n$ 的一组解为 $(x_1,y_1)=(a,b)$ 　　(12)

$x_2^2-dy_2^2=m$ 的一组解为 $(x_2,y_2)=(c,g)$ 　　(13)

则(A)式的一组解为 $x+y\sqrt{d}=(a+b\sqrt{d})(c+g\sqrt{d})$

将(A)的解式展开：

$$(a+b\sqrt{d})(c+g\sqrt{d})=((ac+dbg)+(ag+bc)\sqrt{d}) \qquad (14)$$

证：将(12)(13)的解代入自己的式，然后将二式相乘，

即 $(a^2-db^2)(c^2-dg^2)=a^2c^2+d^2b^2g^2-da^2g^2-db^2c^2$

$=(ac+dbg)^2-2dabcg-d(a^2g^2+b^2c^2)$

$=(ac+dbg)^2-d(a^2e^2+b^2c^2+2abcg)$

$=(ac+dbg)^2-d(ag+bc)^2$

$\Rightarrow x^2-dy^2=nm=M$

由对照知 $x=ac+dbg$，$y=ag+bc$

故本引理得证。

2. (A)式中，当 $M=h^2k$ 时【包括 h、k 也可以是素数和合数】

若已知 $x_3^2-dy_3^2=k$ 的一组解为 $(a_1+b_1\sqrt{d})$

则(A)式的一组解为 (ha_1,hb_1)

这个引理，实际上已在1的证明中证实了，比如在 $x_4^2 - dy_4^2 = h^2$ 式中，就有一组解是 $x_4 = h, y_4 = 0$，由上引理得到(A)的解为：$(a_1 + b_1\sqrt{d})(h + 0\sqrt{d}) = (ha_1 + hb_1)$。

3. (A)式中，当 $M = S^t$ 时【包括 S 可以是素数和合数，t 是零以外的正整数】

若已知 $x_5^2 - dy_5^2 = S$ 的一组解为 $(a_2 + b_2\sqrt{d})$

则(A)式的一组解为 $(a_2 + b_2\sqrt{d})^t$

这个引理，也可由以上1的引理证明。

(二) 在 $ax^2 + bxy \pm cy^2 = M$　　　　(B)

式中，若(B)式左端可用“×字法”进行因式分解，则将 M 分写成二个因数之积，包括1也是一个因数【因此 M 也可以是素数】，比如 $M = ab = cd = eg = \cdots\cdots$，然后逐一将每对因数分别等于左端二个因式进行演算，凡是能够适合求出 x 和 y 的，则都是(B)式的解。如果用“×字法”分解比较困难时，则可由(B)式化为

$$(2ax + by)^2 = ty^2 - 4aM \qquad (15)$$

这时(15)式中的 $t = b^2 - 4ac$，【(B)式中左端第三项的符号如果是“−”，则 $t = b^2 + 4ac$】，而且 t 必等于一个整数的平方数，于是经过简化后可写成 $(a'x + b'y)(a''x + b''y) = M'$，然后再用上段的方法求解就可以了。

如果(B)式左端不等于二个因式之积，则仍将它转化成(15)的形式，并令 $(2ax + by) = D$，写成 $D^2 = ty^2 - 4aM$，最后按照(一)的方法或由第四节连分数法去解就成了。

习题

1. 求下列不定方程的正整数解：

(1) $x^2 = y^3$

(2)$2x^3 - 3y^2$

(3)$2x \quad 5y^2$

2. 判断下列不定方程有否正整数解：

(1)$3x^2 - 5y^4$

(2)$9x^3 = 25y^9$

(3)$24x^5 \quad 35y^{10}$

(4)$121x^3 - 8y^6$

3. 用本章第四节中的二种方法求 $x^2 \quad 11y^2 - - 7$ 的整数解。

4. 用本章第五节的方法解下列不定方程：

(1)$x^2 \quad 23y^2 - 18$

(2)$10x^2 \quad xy \quad 2y^2 - 16$

(3)$3x^2 + 7xy - 8y^2 - 37$

(4)$x^2 \quad 23y^2 - \quad 56$

第四章　关于"奇偶数演算法"的讨论

在不定方程中，把要求的未知数，代以奇数和偶数去进行运算的方法，暂叫"奇偶数演算法"。

$$\text{在形如}\left\{\begin{array}{l} ax^2 + bx + H \quad dy \\ \text{或 } ax^3 + bx^2 + cx + H - dy^2 + ey \\ \text{或 } \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \qquad (a)$$

的不定方程中，当方程有解时，设：

$$x - 2m【\text{或 } 2m \pm 1】 \quad y - 2n【\text{或 } 2n \pm 1】 \quad (b)$$

将(b)式代入(a)式进行运算后，则必有：

$m_k - 0, n_i - 0$，或 $m_k - 0, n_i - N$，或 $m_k = M, n_i - 0$，其中 m、n、M、N 都是整数，

$k = 1,2,3,\cdots\cdots k$

$t = 1,2,3\cdots\cdots t$

下面举例讨论

第一节　求 $3x^2 + 2x + 19 = 23y$ 的整数解

求 $3x^2 + 2x + 19 = 23y$　　　　(1)

式的整数解。

在演解之前，我们先判别(1) 式是否有解。

将(1) 式代入求根公式，即

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 3(19 - 23y)}}{2 \times 3}$$

将其中判别式整理得 $\sqrt{-224 + 12 \times 23y}$

令 $r^2 = -224 + 12 \times 23y$

用二次同余式的解法：

$$r^2 \equiv -224(mod\, 2^2 \times 3 \times 23)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^2 \equiv -224 \equiv 0(mod\, 2^2) \\ r^2 \equiv -224 \equiv 1(mod\, 3) \\ r^2 \equiv -224 \equiv 6(mod\, 23). \end{cases}$$

由欧拉判别条件、二次反旋定律和勒让特符号得到：

$r^2 \equiv 0(mod\, 2^2)$　　　　$2^2, 0,$

$r^2 \equiv 1(mod\, 3) \Rightarrow (\frac{1}{3}) = 1$

$r^2 \equiv 6(mod\, 23) \Rightarrow (\frac{2 \times 3}{23}) = (\frac{2}{23})(\frac{3}{23}) = (\frac{3}{23})$

$= -(\frac{2}{3}) = 1$

故知(1) 式有解，现用“奇偶数演算法”解之。

解：　由(1) 式直接观察可知，当 x 是偶数时，y 是奇数，当 x

是奇数时，y 是偶数，简称一奇一偶，故由(1)式可得到：

$$(1)\Rightarrow\begin{cases}6m^2+2m-2=23n\Rightarrow 3m^2+m-1=23n_1 & (2)\\ 6m^2+8m+12=23n\Rightarrow 3m^2+4m+6=23n_1 & (3)\end{cases}$$

以上由(1)式得到(2)式【即(1)⇒(2)】是这样演算的：

即在(1)式中，令 $x=2m$，$y=2n+1$，代入(1)式整理得到 $6m^2+2m-2=23n$，又由观察得知左式中 n 是偶数，再令 $n=2n_1$，代入再整理得到 $3m^2+m-1=23n_1$【即(2)式】由(1)式得到(3)式【即(1)⇒(3)】，也是仿此方法得到的，以后均如此，不再重述。

$$(2)\Rightarrow\begin{cases}6m_1^2+m_1-12=23n_2 & (4)\\ 6m_1^2+7m_1-10=23n_2 & (5)\end{cases}$$

$$(3)\Rightarrow\begin{cases}6m_1^2+4m_1+3=23n_2\Rightarrow 3m_1^2+2m_1-10=23n_3 & (6)\\ 6m_1^2+10m_1-5=23n_2\Rightarrow 3m_1^2+5m_1-14=23n_3 & (7)\end{cases}$$

$$(4)\Rightarrow\begin{cases}12m_2^2+m_2-6=23n_3 & (8)\\ 12m_2^2+13m_2-14=23n_3 & (9)\end{cases}$$

$$(5)\Rightarrow\begin{cases}12m_2^2+7m_2-5=23n_3 & (10)\\ 12m_2^2+19m_2-10=23n_3 & (11)\end{cases}$$

$$(6)\Rightarrow\begin{cases}6m_2^2+2m_2-5=23n_4\Rightarrow 3m_2^2+m_2-14=23n_5 & (12)\\ 6m_2^2+8m_2-14=23n_4\Rightarrow 3m_2^2+4m_2-7=23n_5 & (13)\end{cases}$$

(7)⇒……

…………(略)

由(10)式容易得到：$m_2=-1$，$n_3=0$，并由此逆算得到(1)式的一组解为：

$$\begin{cases} x = 2m = 2(2m_1+1) = 4m_1+2 = 4(2m_2)+2 = 8m_2+2 \\ \qquad = 8\times(-1)+2 = -6 \\ y = 2n+1 = 2(2n_1)+1 = 4n_1+1 = 4(2n_2+1)+1 \\ \quad = 8n_2+5 = 8(2n_3)+5 = 16n_3+5 = 0+5 = 5 \end{cases}$$

由(13)式容易得到：$m_2=1$，$n_5=0$，并由此逆算得到(1)式的又一组解为：

$$\begin{cases} x = \cdots\cdots = 8m_2+5 = 8\times1+5 = 13 \\ y = \cdots\cdots = 64n_5+24 = 0+24 = 24 \end{cases}$$

【(1)式其余的解略】

另一种解法：

解： 将(1)式代入求根公式：

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\times3(19-23y)}}{2\times3}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-56+69y}}{3}$$

令 $r^2 = -56+69y$

$\Rightarrow r^2 \equiv -56 \equiv 13 (mod 69)$ 用孙子定理可得 $\Rightarrow r \equiv \pm17$，$\pm29 (mod 69)$ 即得到 $r_1 = 17+69t$ 和 $r_2 = 29+69t$

故原(1)式有二个解的表示为：

$$1.\begin{cases} x = \dfrac{-1\pm(17+69t)}{3} \\ y = \dfrac{(17+69t)^2+56}{69} = 69t^2+34t+5 \end{cases}$$

$$2.\begin{cases} x = \dfrac{-1\pm(29+69t)}{3} \\ y = \dfrac{(29+69t)^2+56}{69} = 69t^2+58t+13 \end{cases}$$

其中 $t=0$，±1，±2，……

x 的表示式中的“±”由通过整数解而选择。

第二节　求 $2x^3+2x^2+x+10=y^2$ 的整数解

求：$2x^3+2x^2+x+10=y^2$　　(14)

的整数解。

用"奇偶数演算法"解之。

解： 由(1)式直接观察可有，当 x 是偶数时，y 也是偶数，当 x 是奇数时，y 也是奇数，简称同奇偶，仿第一节：

$$(14)\Rightarrow\begin{cases}8m^3+4m^2+m+5=2n^2\\ \Rightarrow 32m_1^3+56m_1^2+33m_1+9=n^2 & (15)\\ 8m^3+16m^2+11m+7=2n^2+2n\\ \Rightarrow 32m_1^3+80m_1^2+67m_1+21=n^2+n & (16)\end{cases}$$

$$(15)\Rightarrow\begin{cases}128m_2^3+112m_2^2+33m_2+4=2n_1^2+2n_1\\ \Rightarrow 512m_3^3+224m_3^2+33m_3+2=n_1^2+n_1 & (17)\\ 128m_2^3+304m_2^2+241m_2+65=2n_1^2\\ \Rightarrow 512m_3^3+1376m_3^2+1233m_3+369=n_1^2 & (18)\end{cases}$$

$$(16)\Rightarrow\begin{cases}128m_2^3+352m_2^2+323m_2+100=2n_1^2+n_1 & (19)\\ 128m_2^3+352m_2^2+323m_2+99=2n_1^2+3n_1 & (20)\end{cases}$$

$$(17)\Rightarrow\begin{cases}2048m_4^3+448m_4^2+33m_4+1=2n_2^2+n_2 & (21)\\ 2048m_4^3+448m_4^2+33m_4+0=2n_2^2+3n_2 & (22)\end{cases}$$

$$(18)\Rightarrow\begin{cases}2048m_4^3+2752m_4^2+1233m_4+184=2n_2^2+2n_2\\ \Rightarrow 8192m_5^3+5504m_5^2+1233m_5+92=n_2^2+n_2 & (23)\\ 2048m_4^3+5824m_4^2+5521m_4+1745=2n_2^2\\ \Rightarrow 8192m_5^3+23936m_5^2+23313m_5+7569=n_2^2 & (24)\end{cases}$$

$$(19)\Rightarrow\begin{cases}512m_3^3+704m_3^2+323m_3+50=4n_2^2+n_2 & (25)\\ 512m_3^3+1472m_3^2+1411m_3+450=4n_2^2+5n_2 & (26)\end{cases}$$

$$(20) \Rightarrow \begin{cases} 512m_3^3 + 704m_3^2 + 323m_3 + 47 = 4n_2^2 + 7n_2 & (27) \\ 512m_3^3 + 1472m_3^2 + 1411m_3 + 451 = 4n_2^2 + 3n_2 & (28) \end{cases}$$

(21)⇒……(略)

由(15)式容易得到二个组解为：

1. $\begin{cases} n = \pm 3 \\ m_1 = 0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} n = 0 \\ m_1 = -1 \end{cases}$ 并由此逆算得到(14)式二个组解为：

1. $\begin{cases} x = 2 \\ y = \pm 6 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$

由(17)式，因其右端等于二个连续数之积，左端常数2，故容易知道(17)式一组解为 $m_3 = 0, n_1 = 1$，并由此逆算得到(14)式的一组解为 $x = 2, y = 6$【同于(15)式第1组解】。

由(21)式容易得到一组解为 $m_4 = 0, n_2 = -1$，并由此逆算得到(14)式一组解为 $x = 2, y = -6$【同于(15)式第1组解】。

由(22)式容易得到一组解为 $m_4 = n_2 = 0$，并由此逆算得到(14)式一组解为 $x = 2, y = 6$【同于(15)式第1组解】。

由(24)式容易得到一组解为 $m_5 = 0, n_2 = \pm 87$，并由此逆算得到(14)式的一组解为 $x = 62, y = \pm 696$。

在(26)式中，取右端二项和左端常数项，将它们代入求根公式解得 $n_2 = 10$，这叫做"三项试算"(一般地，如果演解纯熟了，这三项可观察得到，否则，就要用求根公式试算)，故(26)式中得到一组解为：$n_2 = 10, m_3 = 0$，并由此逆算得到(14)式一组解为 $x = 15, y = 85$

由(28)式取"三项试算"可得 $n_2 = -11, m_3 = 0$，并由此逆算得到(14)式的一组解为 $x = 15, y = -85$。

(14)式用"奇偶数演算法"演至(28)式，可得到4组解：

1. $\begin{cases} x = 2 \\ y = \pm 6 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x = 62 \\ y = \pm 696 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x = 15 \\ y = \pm 85 \end{cases}$

注： 本题若在(14)式中令 $x=2m-1, y=2n+1$ 代入整理得：(14)$\Rightarrow 8m^3-8m^2+3m+4=2n^2+2n$ 也容易得到一组解为 $m=0, n=1$，并由此逆算得到(14)式一组解为

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=\pm 3 \end{cases}$$

第三节　求 $x^3+x^2+7x+30=2y^2+y$ 的整数解

求： $x^3+x^2+7x+30=2y^2+y$　　(29)

式的整数解。

解： 用"奇偶数演算法"解之。

$$(29)\Rightarrow\begin{cases} 4m^3+2m^2+7m+15=4n^2+n & (30) \\ 4m^3+8m^2+12m+18=4n^2+5n & \\ \Rightarrow 2m^3+4m^2+6m+9=8n_1^2+5n_1 & (31) \end{cases}$$

$$(30)\Rightarrow\begin{cases} 16m_1^3+4m_1^2+7m_1+5=8n_1^2+9n_1 & (32) \\ 16m_1^3+28m_1^2+23m_1+14=8n_1^2+n_1 & (33) \end{cases}$$

$$(31)\Rightarrow\begin{cases} 8m_1^3+8m_1^2+6m_1-2=16n_2^2+21n_2 & \\ \Rightarrow 4m_1^3+4m_1^2+3m_1-1=32n_3^2+21n_3 & (34) \\ 8m_1^3+20m_1^2+20m_1+4=16n_2^2+21n_2 & \\ \Rightarrow 4m_1^3+10m_1^2+10m_1+2=32n_3^2+21n_3 & \\ \Rightarrow 2m_1^3+5m_1^2+5m_1+1=64n_4^2+21n_4 & (35) \end{cases}$$

$$(32)\Rightarrow\begin{cases} 64m_2^3+8m_2^2+7m_2-6=16n_2^2+25n_2 & (36) \\ 64m_2^3+104m_2^2+63m_2+16=16n_2^2+9n_2 & (37) \end{cases}$$

$$(33)\Rightarrow\begin{cases} 64m_2^3+56m_2^2+23m_2+7=16n_2^2+n_2 & (38) \\ 64m_2^3+152m_2^2+127m_2+36=16n_2^2+17n_2 & (39) \end{cases}$$

$$(34)\Rightarrow\begin{cases} 16m_2^3+8m_2^2+3m_2-27=64n_3^2+85n_3 & (40) \\ 16m_2^3+32m_2^2+23m_2+5=64n_3^2+21n_3 & (41) \end{cases}$$

$$(35)\Rightarrow\begin{cases}8m_2^3 + 10m_2^2 + 5m_2 - 42 = 128n_5^2 + 149n_5 & (42)\\ 8m_2^3 + 22m_2^2 + 21m_2 - 36 = 128n_5^2 + 149n_5 & (43)\end{cases}$$

$$(36)\Rightarrow\begin{cases}256m_3^3 + 16m_3^2 + 7m_3 - 3 = 32n_3^2 + 25n_3 & (44)\\ 256m_3^3 + 400m_3^2 + 215m_3 + 16 = 32n_3^2 + 57n_3 & (45)\end{cases}$$

$$(37)\Rightarrow\begin{cases}256m_3^3 + 208m_3^2 + 63m_3 + 8 = 32n_3^2 + 9n_3 & (46)\\ 256m_3^3 + 592m_3^2 + 463m_3 + 111 = 32n_3^2 + 41n_3 & (47)\end{cases}$$

$$(38)\Rightarrow\begin{cases}256m_3^3 + 112m_3^2 + 23m_3 - 5 = 32n_3^2 + 33n_3 & (48)\\ 256m_3^3 + 496m_3^2 + 327m_3 + 75 = 32n_3^2 + n_3 & (49)\end{cases}$$

$$(39)\Rightarrow\begin{cases}256m_3^3 + 304m_3^2 + 127m_3 + 18 = 32n_3^2 + 17n_3 & (50)\\ 256m_3^3 + 688m_3^2 + 623m_3 + 173 = 32n_3^2 + 49n_3 & (51)\end{cases}$$

$$(40)\Rightarrow\begin{cases}64m_3^3 + 16m_3^2 + 3m_3 - 88 = 128n_4^2 + 213n_4 & (52)\\ 64m_3^3 + 112m_3^2 + 67m_3 + 0 = 128n_4^2 + 85n_4 & (53)\end{cases}$$

$(41)\Rightarrow\{\cdots\cdots$(略)

由(53)式容易得到一组解为 $m_3 = n_4 = 0$，并由此逆算得到(29)式的解为：

$$\begin{cases}x = 2m + 1 = 2(2m_1) + 1 = 4m_1 + 1 = 4(2m_2) + 1\\ \quad = 8m_2 + 1 = 8(2m_3 + 1) + 1 = 16m_3 + 9 = 0 + 9 = 9\\ y = 2n + 1 = 2(2n_1) + 1 = 4n_1 + 1 = 4(2n_2 + 1) + 1\\ \quad = 8n_2 + 5 = 8(2n_3) + 5 = 16n_3 + 5 = 16(2n_4 + 1) + 5\\ \quad = 32n_4 + 21 = 32(2n_5) + 21 = 64n_5 + 21 = 0 + 21 = 21\end{cases}$$

另一种解法：在(29)式中，令 $h = x^3 + x^2 + 7x$ 代入(29)式，再代入求根公式：

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \times 2(30 + h)}}{2 \times 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{241 + 8h}}{4}$$

令 $r^2 = 241 + 8h$ 　　故 $y = \dfrac{-1 \pm r}{4}$ 　　(A)

用同余式解法

即 $r^2 \equiv 241 \equiv 1 \ (mod 8) \Rightarrow r \equiv 1, 3, 5, 7 \ (mod 8)$

$$\Rightarrow r \equiv 1,3 \pmod{4}$$

即　$r = 1+8t$，$r = 3+8t$，$r = 5+8t$，$r = 7+8t$

造表如下：

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
$r = 1+8t$	1	9	17	25	33	41	49	57	65	73	81	89	…
$h = \frac{r^2-241}{8}$	−30	−20	6	48	106	180	270	376	498	636	790	960	…
$r = 3+8t$	3	11	19	27	35	43	51	59	67	75	83	91	…
$h = \frac{r^2-241}{8}$	−29	−15	15	61	123	201	295	405	531	673	831	1005	…
$r = 5+8t$	5	13	21	29	37	45	53	61	69	77	85	93	…
$h = \frac{r^2-241}{8}$	−27	−9	25	75	141	223	321	435	565	711	873	1051	…
$r = 7+8t$	7	15	23	31	39	47	55	63	71	79	87	95	…
$h = \frac{r^2-241}{8}$	−24	−2	36	90	160	246	348	466	600	750	916	1098	…
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
$h = x^3+x^2+7x$	0	9	26	57	108	185	294	441	632	873	1170	1529	…

上表的计算方法，见第三章第四节“另一种新解法”的表。当最末一行 h 出现和以上行 h 相等时，就得到适合(A)式的 r 值，比如 $h=873$ 对上同列前行的“85”就是 r，将其代入(A)式得到：$y=\frac{-1+85}{4}=21$，最末行 $h=873$ 的同列上行有 $x=9$，于是得到(1)式的一组解为 $x=9$、$y=21$。

第四节　求 $x^3-y^2=7$ 的整数解

求：$x^3-y^2=7$　　　　(54)

式的整数解。

解：

$$(54)\Rightarrow\begin{cases}8m^3-8=4n^2+4n\Rightarrow 2m^3-2=n^2+n\\ \Rightarrow\begin{cases}m^3-1=2n_1^2+n_1 & (55)\\ m^3-2=2n_1^2+3n_1 & (56)\end{cases}\\ 8m^3+12m^2+6m-6=4n^2\Rightarrow 4m^3+6m^2+3m-3=2n^2\\ \Rightarrow 16m_1^3+36m_1^2+27m_1+5=n^2 & (57)\end{cases}$$

$$(55)\Rightarrow\begin{cases}4m_1^3-2=4n_2^2+5n_2\Rightarrow 2m_1^3-1=8n_3^2+5n_3\\ \Rightarrow m_1^3-7=16n_4^2+21n_4 & (58)\\ 4m_1^3+6m_1^2+3m_1=4m_2^2+n_2 & (59)\end{cases}$$

$$(56)\Rightarrow\begin{cases}4m_1^3-1=4n_2^2+3n_2 & (60)\\ 4m_1^3+6m_1^2+3m_1-3=4m_2^2+7n_2 & (61)\end{cases}$$

$$(57)\Rightarrow\begin{cases}64m_2^3+72m_2^2+27m_2+2=2n_1^2+2n_1\\ \Rightarrow 256m_3^3+144m_3^2+27m_3+1=n_1^2+n_1 & (62)\\ 64m_2^3+168m_2^2+147m_2+42=2n_1^2\\ \Rightarrow 256m_3^3+336n_3^2+147m_3+21=n_1^2 & (63)\end{cases}$$

$$(58)\Rightarrow\begin{cases}4m_2^3-22=32n_5^2+53n_5\Rightarrow 2m_2^3-11=64n_6^2+53n_6\\ \Rightarrow m_2^3-64=128n_7^2+181n_7 & (64)\\ 4m_2^3+6m_2^2+3m_2-3=32n_5^2+21n_5 & (65)\end{cases}$$

(59)⇒…………

……………………(略)

由(55)(56)式容易得到 $\begin{cases}m=1\\ n_1=0\end{cases}$，$\begin{cases}m=1\\ n_1=-1\end{cases}$ 并由此逆算得到(54)式的解为 $\begin{cases}x=2\\ y=\pm 1\end{cases}$

由(59)式容易得到 $\begin{cases}m_1=0\\ n_2=0\end{cases}$，并由此逆算得到(54)的解

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

由(61)式易得$\begin{cases} m_1 = 0 \\ n_2 = 1 \end{cases}$，并由此逆算得到(54)的解为

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

由(64)式易得$\begin{cases} m_2 = 4 \\ n_7 = 0 \end{cases}$，并由此逆算得到(54)的解为

$$\begin{cases} x = 32 \\ y = 181 \end{cases}$$

由本章各节可知，"奇偶数演算法"，对于有解的方程，易懂易演，数论中也常常引用它，例如在勾股数的推论中关于"孰奇孰偶"等等，同时对一些难解的方程用它来演解可奏奇效【见以下第五节】。但是，这种方法，毕竟是有缺点的，因为遇到解的个数很多时它只能逐一递演下去才可以得到，至于遇到无解方程，用它则是无休止的，或者出现重复情况等等。

裴尔方程也可用"奇偶数演算法"解之。

例如：第二章习题3：$x^2 - 11y^2 = -7$ (1)

先把(1)移项为：

$$(1) \Rightarrow x^2 + 7 = 11y^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m^2 - 2 = 22n^2 + 22n \Rightarrow m^2 - 1 = 11n^2 + 11n & (2) \\ 2m^2 + 2m + 4 = 22n^2 \Rightarrow m^2 + m + 2 = 11n^2 & (3) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow \begin{cases} 2m_1^2 + 2m_1 = 22n_1^2 + 11n_1 \Rightarrow m_1^2 + m_1 = 44n_2^2 + 11n_2 & (4) \\ 2m_1^2 + 2m_1 - 11 = 22n_1^2 + 33n_1 \Rightarrow m_1^2 + m_1 - 33 = 44n_2^2 + 77n_2 & (5) \end{cases}$$

$$(3) \Rightarrow \begin{cases} 2m_1^2 + m_1 + 1 = 22n_1^2 \Rightarrow 4m_2^2 + 5m_2 + 2 = 11n_1^2 & (6) \\ 2m_1^2 + 3m_1^2 + 2 = 22n_1 \Rightarrow 4m_2^2 + 3m_2 + 1 = 11n_1^2 & (7) \end{cases}$$

$$(4) \Rightarrow \begin{cases} \text{(4)式取同偶无意义} & \\ 2m_2^2 + 3m_2 + 1 = 88n_3^2 + 11n_3 & (8) \end{cases}$$

$$(5)\Rightarrow\begin{cases}2m_2^2+m_2 \quad 77 = 88n_3^2+165n_3 & (9)\\ 2m_2^2+3m_2-76-88n_3^2+165n_3 & (10)\end{cases}$$

$$(6)\Rightarrow\begin{cases}8m_3^2+5m_3+1=22n_2^2\Rightarrow16m_4^2+21m_4+7-11n_2^2 & (11)\\ 8m_3^2+13m_3=22n_2^2+22n_2\Rightarrow16m_4^2+13m_4-11n_2^2+11n_2 & (12)\end{cases}$$

$$(7)\Rightarrow\begin{cases}8m_3^2+3m_3 \quad 5-22n_2^2+22n_2\Rightarrow16m_2^4+19m_4+3-11{n_2}^2+11n_2 & (13)\\ 8m_2^3+11m_3+4-22n_2^2\Rightarrow16m_4^2+11m_4+2-11n_2^2 & (14)\end{cases}$$

………

由(2)式易得$\begin{cases}m \quad 1\\ n-0\end{cases}$，并由此逆算得到(1)式的解为$\begin{cases}x=2\\ y-1\end{cases}$，其余如(4)(5)(8)(9)(10)式得到的解，并由此逆算得到(1)式的解和(2)式得到的解逆算后得到(1)式的解相同，只不过是解的正负号交换而已。

由(6)式易得$\begin{cases}m_2-1\\ n_1-1\end{cases}$，并由此逆算得到(1)式的解为$\begin{cases}x-13\\ y-4\end{cases}$

再求 $x^2 \quad 11y^2-1$ (15)

式的解：

$(15)\Rightarrow x^2 \quad 1 \quad 11y^2$

$$\Rightarrow\begin{cases}2m^2 \quad 6-22n^2+22n\Rightarrow m^2-3 \cdot 11n^2+11n & (16)\\ 2m^2+2m=22n^2\Rightarrow m^2+m-11n^2 & (17)\end{cases}$$

$$(16)\Rightarrow\begin{cases}2m_1^2+2m_1-12-22n_1^2+33n_1 & \\ \Rightarrow m_1^2+m_1 \; \dot{-} \; 6-44n_2^2+33n_2 & (18)\\ 2m_1^2+2m_1 \quad 1-22n_1^2+11n_1 & (19)\end{cases}$$

$$(17)\Rightarrow\begin{cases}2m_1^2+m_1-22n_1^2\Rightarrow4m_2^2+m_2-11n_1^2 & (20)\\ 2m_1^2+3m_1+1-22n_1^2\Rightarrow4m_2^2+7m_2+3-11n_1^2 & (21)\end{cases}$$

………………

由(16)式易得$\begin{cases} m = 5 \\ n = 1 \end{cases}$，并由此逆算得到(15)式的解为$\begin{cases} x = 10 \\ y = 3 \end{cases}$

由(17)式易得$m = n = 0$，并由此逆算得(15)的解为$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

由(18)式易得$\begin{cases} m_1 = 2 \\ n_2 = 0 \end{cases}$，并由此逆算也和(16)式的逆算相同。把(1)式的诸解，如$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$、$\begin{cases} x = 13 \\ y = 4 \end{cases}$分别和(15)式的非零解即$\begin{cases} x = 10 \\ y = 3 \end{cases}$可得到(1)式的通解式为：

$x + y\sqrt{11} = \pm(10 \pm 3\sqrt{11})^t(2 \pm \sqrt{11})$

或$x + y\sqrt{11} = \pm(10 \pm 3\sqrt{11})^t(13 \pm 4\sqrt{11})$

其中t是正整数。

第五节　同余式

选几道二次同余式题，用通常的演解法和用“奇偶数演算法”分别演算，供读者对照探讨。

例一、求　$x^2 + 3x - 10 \equiv 0 (mod 11)$　　(66)

的解。

(一)通常的解法是：

由于11∤2，故可用4乘(1)式，再配方，即：

$4x^2 + 12x - 40 \equiv 0(mod 11) \Rightarrow (2x + 3)^2 - 49 \equiv 0(mod 11)$

令$y = 2x + 3$代入原式得

$y^2 - 49 \equiv 0(mod 11)$　　$\therefore y \equiv \pm 7(mod 11)$

于是有$2x + 3 = \pm 7$，得到$x = 2$和-5，故(1)式的解为：x

$\equiv 2,\quad 5(mod 11)$ 也即 $x \equiv 2,6(mod 11)$。

（二）**用奇偶数演算法：**

将(1)式换成不定方程，即

$(66) \Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 11y$ (67)

$(67) \rightarrow \begin{cases} 2m^2 + 3m - 5 = 11m & (68) \\ 2m^2 + 5m - 3 = 11n & (69) \end{cases}$

$(68) \Rightarrow \begin{cases} 4m_1^2 + 3m_1 - 8 = 11n_1 & (70) \\ 4m_1^2 + 7m_1 = 11n_1 & (71) \end{cases}$

……………

由(71)式易得二组解为 $1.\begin{cases} m_1 = 0 \\ n_1 = 0 \end{cases}$，$2.\begin{cases} m_1 = 1 \\ n_1 = 1 \end{cases}$，并由此逆算得到(67)二组解为：

$1.\begin{cases} x = 2m = 2(2m_1 + 1) = 4m_1 + 2 = 2 \\ y = 2n = 2(2n_1) = 4n_1 = 0 \end{cases}$

$2.\begin{cases} x = 2m = 2(2m_1 + 1) = 4m_1 + 2 = 4 + 2 = 6 \\ y = 2n = 2(2n_1) = 4n_1 = 4 \end{cases}$

故(66)的解为 $x \equiv 2,6(mod 11)$

例二、求 $x^2 \equiv 5(mod 19)$ (72)

式的解。

（一）**本题由观察**(72)**式的模** 19，**因** $19 = 4 \times 4 + 3$【**即形如** $4m + 3$】，**用欧拉判别条件得到**

$5^{\frac{19-1}{2}} \equiv 1(mod 19) \Rightarrow 5^{2m+1} \equiv 1(mod 4m + 3)$

因为 $(5,19) = 1$，故可以用 5 乘同余式的二边得：

$5^{2m+2} \equiv 5(mod 4m + 3) \rightarrow (5^{m+1})^2 \equiv 5(mod 4m + 3)$

故本题的解为 $x \equiv \pm 5^{m+1}(mod 4m + 3)$

$\rightarrow x \equiv \pm 5^{4+1}(mod 19) \Rightarrow x \equiv \pm 9(mod 19)$

（二）**用奇偶数演算法是：**

将(72) 式换成不定方程

$$(72) \Rightarrow x^2 \quad 5 - 19y \tag{73}$$

$$(73) \Rightarrow \begin{cases} 2m^2 \quad 12 - 19n \Rightarrow m^2 \quad 6 \quad 19n_1 & (74) \\ 2m^2 + 2m \quad 2 - 19n \Rightarrow m^2 + m \quad 1 - 19n_1 & (75) \end{cases}$$

$$(74) \Rightarrow \begin{cases} 2m_1^2 \quad 3 - 19n_2 \Rightarrow m_1^2 - 11 - 19n_3 & (76) \\ 2m_1^2 + 2m_1 \quad 12 - 19n_2 \Rightarrow m_1^2 + m_1 - 6 - 19n_3 & (77) \end{cases}$$

………(略)

由(74)式易得 $\begin{cases} m - 5 \\ n_1 - 1 \end{cases}$，并由此逆算得到(73)式的解 $\begin{cases} x - 10 \\ y - 5 \end{cases}$，

由(75)式易得 $\begin{cases} m - 4 \\ n_1 - 1 \end{cases}$，并由此逆算得到(73)式的解 $\begin{cases} x - 9 \\ y - 4 \end{cases}$，

由(77)式易得 $\begin{cases} m_1 = 2 \\ n_3 - 0 \end{cases}$，并由此逆算得到(73)式的解 $\begin{cases} x - 10 \\ y - 5 \end{cases}$，

故(72)式的解为 $x \equiv 9, 10 (mod 19)$ 也即 $x - \pm 9 (mod 19)$

例三、求 $x^2 = 13 (mod 17)$ (78)

式的解。

（一）**本题通常的解法是用"指数"且需查表，即：**

$x^2 \equiv 13 (mod 17) \xrightarrow{\text{取指数}} 2ind x \equiv ind 13 (mod 16) \xrightarrow{\text{查 } I \text{ 表}} 2ind x \equiv 12 (mod 16) \Rightarrow ind x \equiv 6 (mod 8) \Rightarrow ind x_1 \equiv 6 (mod 16), ind x_2 \equiv 14 (mod 16) \xrightarrow{\text{查 } N \text{ 表}} x_1 \equiv 9,\ x_2 \equiv 8 (mod 17)$ 也即 $x \equiv \pm q (mod 17)$。

（二）用奇偶数演算法：

将(78)式换成不定方程，即

$$(78) \Rightarrow x^2 = 13 - 17y \qquad (79)$$

$$(79) \Rightarrow \begin{cases} 2m^2 = 15 - 17n \Rightarrow m^2 = 16 - 17n_1 & (80) \\ 2m^2 + 2m = 6 - 17n \Rightarrow m^2 + m = 3 - 17n_1 & (81) \end{cases}$$

由(80)式容易得到$\begin{cases} m = 4 \\ n_1 = 0 \end{cases}$，并由此逆算得到(79)的解$\begin{cases} x = 8 \\ y = 3 \end{cases}$，

由(81)式易得$\begin{cases} m = 4 \\ n_1 = 0 \end{cases}$，并由此逆算得到(79)的解$\begin{cases} x = 9 \\ y = 4 \end{cases}$，

故(78)式的解为 $= 8, 9 (mod 17)$

注：以上例二例三也可用柯尔金公式求解，但演算量太大。

习题

用奇偶数演算法解下列第1至第4不定方程：

1. $2x^2 + 5x + 1 = 17y$

2. $11x^3 + 2x^2 + 5x + 63 = y^2$

3. $x^3 - 2 = y^2$

4. $3x^3 + 4x^2 + 5x + 3 = 4y^2 + 7y$

5. 1990年国庆节是星期1，问1991年元旦是星期几？

6. 马牛羊同赛跑，马每小时跑150里，牛每小时跑120里，羊每小时跑90里，结果马当先，共用若干小时又24分，牛次之，共用若干小时又15分，羊殿后，共用若干小时。假如赛程在2000里内，问赛程长多少里？马牛羊各走多少时间？

第五章　关于 $x^a + y^b = pz$ 的讨论

关于 $x^a + y^b = pz$ 整数解的讨论，其中 a 和 b 是自然数，p 是奇素数。

在形如上式的不定方程的诸解中，我们一看就知道有 $x = y = 0$ 和 x 和 y 都含有因数 p 的二个解【其实0也是 p 的倍数】。但是如果排除了这二个解以外，对其余的解又是如何求得呢？本章所讨论的就是“其余的解”这方面。

下面无特别声明，所指的解，就是除了0和含有因数 p 以外的整数解。要解决这个问题，可以引进同余式。具体的解法是：首先给定出方程中 x【或 y】等于1至 $(p-1)$ 的解，并将其分别代入原式，其次将方程换算为同余式，最后借助于查素数的元根指数表。举例如下。

第一节　求 $x^2 + y^5 = 7z$，$x^3 + y^5 = 7z$，$x^5 + y^6 = 7z$ 的整数解

求　$x^2 + y^5 = 7z$　　(1)

式的解。

解：　取 $x = 1$，代入(1)式并换算为同余式，即：

$$y^5 \equiv -1 \equiv 6 \pmod 7 \xrightarrow{\text{两边取指数}} 5\,ind\ y \equiv ind\ 6 \pmod 6$$

$$\xrightarrow{\text{查素数7的元根 I 表}} 5\ ind\ y \equiv 3 \equiv 15 \pmod 6$$

$$\rightarrow ind\ y \equiv 3 \pmod 6 \xrightarrow{\text{查 N 表}} y \equiv 6 \pmod 7$$

因 $(5,6) = 1$，故这个同余式有唯一解。

取 $x = 2$，代入(1)式并换算为同余式，即：

同样方法可得：

$y^5 \equiv 4 \equiv 3(mod7) \Rightarrow 5ind\ y \equiv ind3(mod6)$

$\Rightarrow 5ind\ y \equiv 1 - 25(mod6) \Rightarrow ind\ y \equiv 5(mod6)$

$\Rightarrow y \equiv 5(mod7)$

取 $x = 3$　代入(1)式并换算为同余式，即：

$y^5 \equiv 9 \equiv 5(mod7) \Rightarrow 5\ ind\ y \equiv ind\ 5(mod6)$

$\Rightarrow 5\ ind\ y \equiv 5(mod6) \Rightarrow ind\ y \equiv 1(mod6)$

$\Rightarrow y \equiv 3(mod7)$

取 $x - 4$　代入(1)式并换算为同余式，即：

$y^5 \equiv - 16 \equiv 5(mod7)$ 因和 $x - 3$ 时的同余式相同，

故 $\Rightarrow y \equiv 3(mod7)$

取 $x - 5$　代入(1)式并换算为同余式，即：

$y^5 \equiv 25 \equiv 3(mod7)$ 因和 $x - 2$ 时的同余式相同，故 $\Rightarrow y \equiv 5(mod7)$

由上得知，(1)式共有3组解的表示式：

取 $x - 6$，代入(1)或并换算为同余式，即：$y^5 \equiv 36(mod7)$ 因和 $x = 1$ 时的同余式相同，故 $\Rightarrow y - 6(mod)$

取 $x - 6$ 代入(1)式并换成算为同余式，即：$y^5 \equiv - 36 \equiv 6(mod7)$　因和 $x - 1$ 时的同余式相同，故 $\Rightarrow y - 6(mod7)$

由上得知，(1)式共有3组解的表示式：

1 $\begin{cases} x \equiv \pm 1(mod7) \\ y \equiv 6\ \ (mod7) \end{cases}$　　2 $\begin{cases} x \equiv \pm 2(mod7) \\ y \equiv 5\ \ (mod7) \end{cases}$

3 $\begin{cases} x - \pm 3(mod7) \\ y \equiv 3\ \ (mod7) \end{cases}$　　$z - \dfrac{x^2 + y^5}{7}$

附　素数7的元根及指数表

元根：3，5，

底数：3，

I

N	1	2	3	4	5	6
I	6	2	1	4	5	3

N

I	1	2	3	4	5	6
N	3	2	6	4	5	1

求：$x^3+y^5=7z$ (2)

式的解。

用同(1)式的方法可得：

取 $x=1$ 时 则 $y=6$

取 $x=2$ 时 则 $y=6$

取 $x=3$ 时 则 $y=1$

取 $x=4$ 时 则 $y=6$

取 $x=5$ 时 则 $y=1$

取 $x=6$ 时 则 $y=1$

故(2)式共有二组解的表示式，即

$$\begin{cases} x\equiv 1,2,4 \pmod 7 \\ y\equiv 6 \pmod 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\equiv 3,5,6 \pmod 7 \\ y\equiv 1 \pmod 7 \end{cases}$$

$$z=\frac{x^3+y^5}{7}$$

求：$x^5+y^6=7z$ (3)

式的解。

用同(1)式的方法可得：

取 $x=1$ 时，得到：

$y^6\equiv -1\equiv 6 \pmod 7 \Rightarrow 6\,\mathrm{ind}\,y\equiv \mathrm{ind}\,6 \pmod 6$

$\Rightarrow 6\,\mathrm{ind}\,y\equiv 3 \pmod 6$ ∵$(6,6)=6\nmid 3$，∴ 同余式无解。

取 $x=2$ 时得到：

$y^6\equiv -32\equiv 3 \pmod 7 \Rightarrow 6\,\mathrm{ind}\,y\equiv \mathrm{ind}\,3 \pmod 6$

$\Rightarrow 6\,\mathrm{ind}\,y\equiv 1 \pmod 6$ ∵$6\nmid 1$，∴ 同余式无解。

取 $x=3$ 时得到：

$y^6 \equiv -243 \equiv 2(mod7) \Rightarrow 6ind\ y \equiv ind2(mod6)$

$\Rightarrow 6ind\ y \equiv 2(mod6)$ ∵$6\nmid 2$，∴同余式无解，

取 $x=4$ 时得到：

$y^6 \equiv -1024 \equiv 5(mod7) \Rightarrow 6ind\ y \equiv ind5(mod6)$

$\Rightarrow 6ind\ y \equiv 5(mod6)$ ∵$6\nmid 5$，∴同余式无解，

取 $x=5$ 时得到：

$y^6 \equiv -3125 \equiv 4(mod7) \Rightarrow 6ind\ y \equiv ind4(mod6)$

$\Rightarrow 6ind\ y \equiv 4(mod6)$ ∵$6\nmid 4$，∴同余式无解，

取 $x=6$ 时得到：

$y^6 \equiv -7776 \equiv 1(mod7) \Rightarrow 6ind\ y \equiv ind1(mod6)$

$\Rightarrow 6ind\ y \equiv 6(mod6) \Rightarrow ind\ y \equiv 1,2,3,4,5,6(mod6)$

$\Rightarrow y \equiv 3,2,6,4,5,1(mod7)$

故(3)式的解有唯一表示式为：

$$\begin{cases} x \equiv 6(mod7) \\ y \equiv 1,2,3,4,5,6(mod7) \Rightarrow y \equiv \pm 1, \pm 2, \pm 3(mod7)。\end{cases}$$

$z = \dfrac{x^5+y^6}{7}$。

第二节 求 $x^2+y^2=7z, x^3+y^3=7z$ 的整数解

求 $x^2+y^2=7z$ (4)

式的解。

解：取 $x=1$ 时，得到：

$y^2 \equiv -1 \equiv 6(mod7) \Rightarrow 2\ ind\ y \equiv ind\ 6(mod6)$

$\Rightarrow 2\ ind\ y \equiv 3(mod6)$ ∵$(2,6)=2\nmid 3$，∴无解

取 $x=2$ 时得到：

$$y^2 = 4 \equiv 3(mod7) = (\frac{3}{7}) = (\frac{7}{3}) = (\frac{1}{3}) = -1$$

以上是计算勒让得符号得到无解,【下同】

取 $x = 3$ 时得到:

$$y^2 = -9 \equiv 5(mod7) = (\frac{5}{7}) = (\frac{2}{5}) = -1$$,无解,

取 $x = 4$ 时得到:

$$y^2 = 16 \equiv 5(mod7) = (\frac{5}{7}) = -1$$,无解,

取 $x = 5$ 时得到:

$$y^2 = 25 \equiv 3(mod7) = (\frac{3}{7}) = -1$$,无解,

取 $x = 6$ 时得到:

$$y^2 = 36 \equiv 6(mod7) = (\frac{6}{7}) = (\frac{2 \times 3}{7}) = (\frac{3}{7}) = -(\frac{1}{3})$$

$= -1$,无解。

由于取 $x < 7$ 时,无解,

故知(4)式无【非零和不含7的倍数】解。

求: $x^3 + y^3 = 7z$ (5)

式的解。

解: 用同上面的方法可得到:

$$\begin{cases} x = 1,2,4(mod7) \\ y \equiv 3,5,6(mod7) \\ z = \dfrac{x^3 + y^3}{7} \end{cases}$$

因 x 和 y 的幂相同,故它二的解可以互相交换。

第三节　求 $x^2 + y^3 = 12z$ 的整数解

求 $x^2 + y^3 = 12z$ (6)

式的解。

这个不定方程，由于右端的系数是个复合数，其解法也同以上各节的方法，但要引用孙子定理，演解如下：

取 $x=1$ 时得到：

$$y^3 \equiv -1 \equiv 11(mod12) \Rightarrow \begin{cases} y^3 \equiv 11 \equiv 3(mod4) \Rightarrow y \equiv 3(mod4) \\ y^3 \equiv 11 \equiv 2(mod3) \Rightarrow y \equiv 2(mod3) \end{cases}$$

由孙子定理得到 $y \equiv 11(mod12)$

取 $x=2$ 时得到：

$$y^3 \equiv -4 \equiv 8(mod12) \Rightarrow \begin{cases} y^3 \equiv 8 \equiv 0(mod4) \Rightarrow y \equiv 0,2(mod4) \\ y^3 \equiv 8 \equiv 2(mod3) \Rightarrow y \equiv 2(mod3) \end{cases}$$

由孙子定理得到 $y \equiv 2,8(mod12)$

取 $x=3$ 时得到：

$$y^3 \equiv -9 \equiv 3(mod12) \Rightarrow \begin{cases} y^3 \equiv 3(mod4) \Rightarrow y \equiv 3(mod4) \\ y^3 \equiv 3 \equiv 0(mod3) \Rightarrow y \equiv 0(mod3) \end{cases}$$

由孙子定理得到 $y \equiv 3(mod12)$

取 $x=4$ 时得到：

$$y^3 \equiv -16 \equiv 8(mod12) \Rightarrow y \equiv 2,8(mod12)$$

取 $x=5$ 时得到：

$$y^3 \equiv -25 \equiv 11(mod12) \Rightarrow y \equiv 11(mod12)$$

取 $x=6$ 时得到：

$$y^3 \equiv -36 \equiv 0(mod12) \Rightarrow y \equiv 0,6(mod12)$$

取 $x=7$ 时得到：

$$y^3 \equiv -49 \equiv 11(mod12) \Rightarrow y \equiv 11(mod12)$$

取 $x=8$ 时得到：

$$y^3 \equiv -64 \equiv 8(mod12) \Rightarrow y \equiv 2,8(mod12)$$

取 $x=9$ 时得到：

$$y^3 \equiv -81 \equiv 3(mod12) \Rightarrow y \equiv 3(mod12)$$

取 $x=10$ 时得到：

$$y^3 \equiv -100 \equiv 8(mod12) \Rightarrow y \equiv 2,8(mod12)$$

取 $x=11$ 时得到：

$y^3 \equiv 121 \equiv 11 (mod 12) \Rightarrow y \equiv 11 (mod 12)$

由以上得到(6)式共有四组解的表示式：

$1\begin{cases} x \equiv \pm 1, \pm 5 (mod 12) \\ y \equiv 11 (mod 12) \end{cases}$ $2\begin{cases} x \equiv \pm 2, \pm 4 (mod 12) \\ y \equiv 2, 8 (mod 12) \end{cases}$

$3\begin{cases} x \equiv \pm 3 (mod 12) \\ y \equiv 3 (mod 12) \end{cases}$ $4\begin{cases} x \equiv \pm 6 (mod 12) \\ y \equiv 0, 6 (mod 12) \end{cases}$

$z = \frac{x^2 + y^3}{12}$

第四节　本章结论

综合本章各节可以得到：

在 $x^a + y^b = pz$ 式中，

若$(a,b) = M$，当 M 是奇数时，则方程必有解；

当 M 是偶数，且仅且 p 是形如 $4m+1$ 时，方程有解，否则无解。

若$(a, p-1) = d$，则同一个 y 的解时，x 有 d 个解；

若$(b, p-1) = c$，则同一个 x 的解时，y 有 c 个解；

若$(a, p-1) = (b, p-1) = 1$，则一个 x 解时，只有一个 y 解，同时方程的解总共有$(p-1)$个表示式；

若 $d > c$ 时，则方程的解共有$\frac{p-1}{d}$个表示式；

若 $c > d$ 时，则方程的解共有$\frac{p-1}{c}$个表示式。

附：素数 5 的元根及指数表

元根 3，底数 2，

I

N	1	2	3	4
I	4	1	3	2

N

I	1	2	3	4
N	2	4	3	1

习题

1. 求 $x^4 + y^5 = 7z$ 的解
2. 求 $x^2 + y^6 = 7z$ 的解
3. 求 $x^3 + y^6 = 7z$ 的解
4. 求 $x^5 + y^7 = 7z$ 的解
5. 求 $x^4 + y^4 = 7z$ 的解
6. 求 $x^6 + y^6 = 7z$ 的解
7. 求 $x^8 + y^8 = 7z$ 的解
8. 求 $x^4 + y^6 = 7z$ 的解
9. 求 $x^4 + y^4 = 21z$ 的解
10. 求 $x^2 + y^3 = 15z$ 的解
11. 求 $x^3 - y^2 = 2$ 的解

第六章　勾股数和 $x^n = z^2 - y^2$ 解的讨论

第一节　重温勾股定理

勾股数指的是一个直角三角形的三边长都取整数。我国古代数学家已经给出了如：$3^2 + 4^2 = 5^2$，$5^2 + 12^2 = 13^2$，$8^2 + 15^2 = 17^2$，……它实际上就是不定方程

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{1}$$

式的非零整数解。很多高次不定方程的解的研究，都吸收了(1)式的讨论精华，因此，在研究非常广泛的不定方程的领域中，重温勾股定理是很必要的，下面用比较简单和扼要的边解边讲的方法来讨论(1)式。

首先要确定在(1)式中，哪个是奇数，哪个是偶数。

(一)先证明x和y不能同时都是奇数，如果x和y都是奇数，即有

$x=2m+1$，　$y=2n+1$，m和n都是整数，代入(1)式得：

$x^2+y^2=(2m+1)^2+(2n+1)^2=4(m^2+m+n^2+n)+2$ 得到 $2\mid x^2+y^2$，　$4\nmid x^2+y^2$

这就是说，因为x和y都是奇数，则由(1)式得知z^2等于偶数，因z^2是偶数，则z也是偶数，所以有$4\mid z^2$，这和(1)式有$2\mid x^2+y^2$而$4\nmid x^2+y^2\Rightarrow 4\nmid z^2$发生矛盾，故$x$和$y$不能同时都是奇数。

(二)x和y也不必都取为偶数，因为如果x和y都取为偶数，则有$(x,y)=d$，得到$(\frac{x}{d},\frac{y}{d})=1$，这时$\frac{x}{d}$和$\frac{y}{d}$要么是一偶一奇，要么是同奇，但由(一)的证明它们不能是同奇，故只能是一偶一奇，因此假设x是偶，y是奇，并由(1)式得到z也是奇数，又因为$(\frac{x}{d},\frac{y}{d})=1$，故可以直接假设$(x,y)=1$。

将(1)式移项为：

$$x^2=z^2-y^2$$

即 $x^2=(z+y)(z-y)$　　(2)

由于z和y都是奇数，得到$(z+y)$和$(z-y)$都是偶数，故有$2\mid z+y$和$2\mid z-y$，又由于x是偶数，得到$4\mid x^2$，并由(2)式有$4\mid(z+y)(z-y)$，我们把4同时去除(2)式的二边得到：

$$\frac{x^2}{4}=\frac{(z+y)(z-y)}{4} \qquad (3)$$

由于$2\mid z+y$和$2\mid z-y$，故知$\frac{z+y}{2}$和$\frac{z-y}{2}$都是正整数，因此(2)式有

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{z+y}{2}\cdot\frac{z-y}{2} \qquad (4)$$

假设$(\frac{z+y}{2},\frac{z-y}{2})=d$，则有$\frac{z+y}{2}=dm'$，$\frac{z-y}{2}=dn'$，$m'$和$n'$

都是正整数，且$(m',n')=1$，

因为$\frac{z+y}{2}-\frac{z-y}{2}=d(m'-n')=y$，故$d|y$，

$$\left.\begin{array}{l}\text{由于}\frac{z+y}{2}=dm'\Rightarrow z+y=2dm' \\ \frac{z-y}{2}=dn'\Rightarrow z-y=2dn'\end{array}\right\} \qquad (5)$$

因此有，$x^2=z^2-y^2=(z+y)(z-y)=4d^2m'n'$ (6)

由(6)式有$d^2|x^2\Rightarrow d|x$，由于有$d|x$和$d|y$，又因为$(x,y)=1$，故得到$d=1$，由于$d=1$，$(m',n')=1$和

(5)式得到$(\frac{z+y}{2},\frac{z-y}{2})=1$，由于$(\frac{z+y}{2},\frac{z-y}{2})=1$和(4)式，故知$\frac{z+y}{2}$和$\frac{z-y}{2}$都是一个平方数，故可令：

$$\frac{z+y}{2}=a^2 \qquad ①$$

$$\frac{z-y}{2}=b^2 \qquad ②$$

a和b都是正整数

将①－②得到　　$y=a^2-b^2$

将①＋②得到　　$z=a^2+b^2$

将①②代入(4)式，整理得到$x=2ab$，故(1)式的一切整数解，可由以下式表示出来，$x=2ab$，$y=a^2-b^2$，$z=a^2+b^2$，其中a和b都是正整数，$a>b$，$(a,b)=1$，$2\nmid a+b$。

因为$(\frac{z+y}{2},\frac{z-y}{2})=1$，$\therefore (a^2,b^2)=1$，从而$(a,b)=1$；因为$y$是奇数，故$a$和$b$是一奇一偶，从而$2\nmid a+b$。

第二节　关于$x^n=z^2-y^2$的正整数解的讨论

求证：$x^n=z^2-y^2$ (7)

式的正整数解【没有特别声明，以后均简称“解”】可由下式表示出来：$n=2,3,4,\cdots$

$$x=kv,\quad z=\frac{(kv)^n+b^2}{2b},\quad y=\frac{(kv)^n-b^2}{2b} \tag{8}$$

【实际上，上式也适用于一切整数解，但这里以讨论正整数解更易理解】

(8)式中的 k 和 v 是正整数，且都取素数，b 是正整数，b 是 $(kv)^n$ 的一个因数，b 和 (kv) 同奇偶，而且 $(kv)^n>b^2$，$k\neq v$。

验证　由(7)式和(8)式有：

$$z^2-y^2=\left[\frac{(kv)^n+b^2}{2b}\right]^2-\left[\frac{(kv)^n-b^2}{2b}\right]^2=\frac{(kv)^{2n}+2b^2(kv)^n+b^4}{(2b)^2}$$

$$-\frac{(kv)^{2n}-2b^2(kv)^n+b^4}{(2b)^2}=\frac{4b^2(kv)^n}{(2b)^2}=(kv)^n=x^n$$

故(8)式是满足(7)式解的表示式。

§1　由(7)式得到：$x^n=(z+y)(z-y)$ (9)

设 $z+y=a\quad z-y=b$ (10)

由(10)式得到：$a-b=2y$，故 $a=b+2y$ (11)

由(9)(10)(11)得到　$x^n=b(b+2y)$ (12)

令 $x=kv$，k 和 v 都是正整数 (13)

由(12)(13)得到 $(kv)^n=b(b+2y)$ (14)

由(14)移项变形得：　$y=\dfrac{(kv)^n-b^2}{2b}$ (15)

由(10)和(15)得到　$z=\dfrac{(kv)^n+b^2}{2b}$ (16)

由(13)(15)(16)得到(8)式。

由(14)式得知 b 是 $(kv)^n$ 的一个因数，且 $(kv)^n>b^2$，

§2　【引理 A】　在(8)式中，若 M^2 是 x 的因数，M^n 是 z 和 y 的因数，则 x 除以 M^2，z 和 y 分别除以 M^n，得到的 x'、y'、z'，仍是(7)式的一组解。

证：　以(8)式代入(7)式得：

$$(kv)^n = \left[\frac{(kv)^n + b^2}{2b}\right]^2 - \left[\frac{(kv)^n - b^2}{2b}\right]^2 \tag{17}$$

以 4^n 同时乘(17)式的两边得：

$$\begin{aligned}(4kv)^n &= 4^n\left\{\left[\frac{(kv)^n + b^2}{2b}\right]^2 - \left[\frac{(kv)^n - b^2}{2b}\right]^2\right\} \\ &= 2^{2n}\left\{\left[\frac{(kv)^n + b^2}{2b}\right]^2 - \left[\frac{(kv)^n - b^2}{2b}\right]^2\right\} \\ &= 2^{2n}\left(\frac{(kv)^n + b^2}{2b}\right)^2 - 2^{2n}\left(\frac{(kv)^n - b^2}{2b}\right)^2 \\ &= \left\{\frac{2^n[(kv)^n + b^2]}{2b}\right\}^2 - \left\{\frac{2^n[(kv)^n - b^2]}{2b}\right\}^2\end{aligned} \tag{18}$$

以(18)式和(7)式对照得知

$$x = 4kv \quad z = \frac{2^n[(kv)^n + b^2]}{2b} \quad y = \frac{2^n[(kv)^n - b^2]}{2b} \tag{19}$$

(19)式也是(7)式的正整数解的表示式。

由(19)式和(8)式对照得知

将(19)式分别除以 2^2、2^n，则得到(8)式；反过来将(8)式分别乘以 2^2、2^n，则得到(19)式，由此推之，若(7)式的解，分别乘以或除以 M^2、M^n 时【M 是任意整数】仍是(7)式的一组解。

§3.【引理 B】在(8)式中，可以先确定 b，然后选择 k 和 v，也可以先确定 k 和 v，然后再定 b，但总须以 $(kv)^{\frac{n}{2}} > b$ 为条件。很明显，当 $n = 2$ 时，取 $k > v$，则 $b \leqslant v$，由此得知，在(7)式中，同一个 x 的正整数解，却有较多个 y 和 z 的正整数解。由此看来，由(8)式是(7)式的一切正整数解的表示式，又可更具体地列出较多个正整数解的表示式，现讨论如下：

当 $n = 2$ 时，　　即 $x^2 = z^2 - y^2$ 　　(20)

(20)式是勾股数的变形，也可用以上的讨论方法得到证明。

由(20)式和(8)式有：

$$x = kv \qquad y = \frac{(kv)^2 - b^2}{2b} \qquad z = \frac{(kv)^2 + b^2}{2b} \tag{21}$$

在 $(kv) > b$ 的条件下，由(21)式有：

$b = v, \quad b = v^2, \quad b = v^3, \cdots, b = v^i,$

以 $b = v$ 代入(21)式得：

$$x = kv, \qquad y = \frac{v(k^2 - 1)}{2} \qquad z = \frac{v(k^2 + 1)}{2} \tag{22}$$

以 $b = v^2$ 代入(21)式得：

$$x = kv, \qquad y = \frac{k^2 - v^2}{2} \qquad z = \frac{k^2 + v^2}{2} \tag{23}$$

因为(20)式 $n = 2$，由本节(引理 A)，可用 M^2 同时去乘(20)式的解，又因为这三元同是 2 次方，所以可用 $M = 2$ 去乘(22)(23)，分别得到：

$$x = 2kv \qquad y = v(k^2 - 1) \qquad z = v(k^2 + 1) \tag{24}$$

$$x = 2kv \qquad y = k^2 - v^2 \qquad z = k^2 + v^2 \tag{25}$$

同理，又可在(24)式中除以 v，得到：

$$x = 2k \qquad y = k^2 - 1 \qquad z = k^2 + 1 \tag{26}$$

在(26)式中，1 是个平方数，故(25)式已包括(26)式。

以 $b = v^3$ 代入(21)式，再乘 $2v$ 得到：

$$x = 2kv^2, \quad y = k^2 - v^4 \qquad z = k^2 + v^4 \tag{27}$$

以 v 等于 v^2 代入(27)式，所得和(25)式一样。如以 $b = v^4$ 代入(21)式，又以 $2v^2$ 分别乘 x, y, z，再以 v 等于 v^3 代入这个式所得也和(25)式一样。如果要求 $(x, y, z) = 1$，在(25)式中，则取 $(k, v) = 1$，$2 \nmid k + v$。

由此得到(20)式的一切正整数解可由(8)式转化为(25)式表示出来，故由以上也可证明勾股定理。

当 $n \geq 3$，(8)式中，由(14)式可取

$$b = v^i, \quad v^i k^c$$

其中 k 和 v 是正整数，$k > v$，

$i = 1, 2, 3, \cdots\cdots n,$

$1 \leq c \leq \frac{n-1}{2}$ 或 $\frac{n-2}{2}$

即：n 是奇数时：$1 \leqq c \leqq \frac{n-1}{2}$

n 是偶数时：$1 \leqq c \leqq \frac{n-2}{2}$

以 $b = v^{2c}$ 代入(8)式得到：

$$x = kv \qquad y = \frac{(kv)^n - v^{2c}}{2v^{2c}} \qquad z = \frac{(kv)^n + v^{2c}}{2v^{2c}} \tag{28}$$

以 $b = v^c k^c$ 代入(8)式得到

$$x = kv \qquad y = \frac{(kv)^n - (v^c k^c)^2}{2v^c k^c} \qquad z = \frac{(kv)^n + (v^c k^c)^2}{2v^c k^c} \tag{29}$$

故(28)和(29)是(7)式而 $n \geqslant 3$ 时正整数解的表示式，其中 k 和 v 都是正整数，$k > v$，且要适当取值。

例如：$x^7 = z^2 - y^2$ 式的解的表示式是：

即(28)和(29)式。

其中 $c = 1,2,3,4,5,6,7$。

$$1 \leqq c \leqq \frac{7-1}{2} = 3$$

如以 $b = v^7 k^3$ 得到：

$$x = kv \quad y = \frac{(kv)^7 - (v^7 k^3)^2}{2v^7 k^3} \quad z = \frac{(kv)^7 + (v^7 k^3)^2}{2v^7 k^3} \tag{30}$$

将上式整理得：

$$x = kv \qquad y = \frac{k^3(k - v^7)}{2} \qquad z = \frac{k^3(k + v^7)}{2} \tag{31}$$

在(31)式中，k、v 要适当取值，如取 k 为偶数，v 可以取偶数或奇数，如取 k 为奇数，则 v 只能也取为奇数，且 $k - v^7 > 0$ 才得到正整数解。

注：这里须特别说明一下，在(8)式中，如果 k 和 v 不是素数，由于 b 的取值中，有的小于 k【或 v】，那么只取 $b = k^c$ 或 v^c，$b = k^c v^c$【或 $v^c k^c$】，就会把小于 k 或 v 的 b 漏丢了，例如在 $x^3 = z^2 - y^2$ 式中，$x = kv$，如果 $k = 6$【是复合数】，$v = 5$，则解的表示式中还可以 $b = 2$【$k = 6$，$v = 5$，$b = 2$，得到 $x = 30$，$y = 6749$，$z = 6751$，它也是一组正整数解】如果只限于以上 b 的取值就把 $b = 2$ 漏丢了【如

果 k 和 v 都是复合数，且含更多的素因数，由此类推，漏丢就更多了】，因此 b 的取值范围：b 是在 $(kv)^2$ 的因数的条件下所有能够通过表示式的整数。

例题 1 求 $x^2 = 2y^2 + z^2 + 3yz + z - 2$ (32)

式零以外的正整数解。

解 由(32)式得到 $x^2 = (2y + z + 2)(y + z - 1)$ (33)

令 $2y + z + 2 = a, \quad y + z - 1 = b$ (34)

由(34)式得到 $a - b = y + 3$ 即 $a = b + y + 3$ (35)

由(33)(34)(35)得到 $x^2 = b(b + y + 3)$ (36)

设 $x^2 = (kv)^2$ k 和 v 都是正整数

由(36)式和本节§1的引理得到：

$$x = kv, \ y = \frac{(kv)^2 - b(b+3)}{b}, z = \frac{2b^2 - (kv)^2 + 4b}{b} \quad (37)$$

因 b 是 $(kv)^2$ 的一个因数，且 $kv > b$，故有

$$b = v^t$$

以 $b = v$ 代入(37)式得到：

$$x = kv, \quad y = v(k^2 - 1) - 3, \quad z = v(2 - k^2) + 4, \quad (38)$$

在(38)式中，由 $y = v(k^2 - 1) - 3 \geqslant 0$，得到二组解，即：

$$1. \begin{cases} v = 1 \\ k > 2 \end{cases} \qquad 2. \begin{cases} v > 1 \\ k > 1 \end{cases}$$

又由 $z = v(2 - k^2) + 4 > 0$，

若以 $v = 1$ 代入 $z = v(2 - k^2) + 4 > 0$

得到 $2 - k^2 + 4 > 0 \Rightarrow 6 > k^2$ 这和 $k > 2$ 发生矛盾。

又若以 $v > 1$，取 $v = 2$ 代入 $z = v(2 - k^2) + 4 > 0$ 得到 $2(2 - k^2) + 4 > 0 \Rightarrow 2 > k$ 这也和 $k > 1$ 发生矛盾，故(38)式不是(32)式正整数解的表示式

以 $b = v^2$ 代入(37)式得到：

$$x = kv \quad y = k^2 - v^2 - 3 \quad z = 2v^2 - k^2 + 4 \quad (39)$$

在(39)式中，因 $y=k^2-v^2-3>0$，得到 $k^2>v^2+3$

又因 $z=2v^2-k^2+4>0$，得到 $k^2<2v^2+4$

故有 $v^2+3<k^2<2v^2+4$

k 和 v 都是正整数，试算得到提示：$v>1, k=v+1$。

以 $b=v^3$ 代入(6)式得到

$$x=kv \quad y=\frac{k^2-v(v^3+3)}{v} \quad z=\frac{2v^4+4v-k^2}{v} \tag{40}$$

在(40)式中，因 $y=\dfrac{k^2-v(v^3+3)}{v}>0$，即 $k^2>v^4+3v$

$z=\dfrac{2v^4+4v-k^2}{v}>0$，即 $k^2<2v^4+4v$

故有 $v^4+3v<k^2<2v^4+4v$，且 $v|k^2$

k 和 v 都是正整数，经试算得到：$v>1, k>5$，并适当取值，即：

$v=2$　则　$k=6$

$v=3$　则　$k=12$

$v=4$　则　$k=18,20,22,$

$v=5$　则　$k=30,35,$

$v=6$　则　$k=42,48,$

$v=7$　则　$k=56,63,$

$v=8$　则　$k=68,72,76,$

…………………………

以 $b=v^4$ 代入(37)式得：

……………………………(略)

另一种解法：

将(36)式整理移项得：

$$x^2=b(y+3)-b^2 \tag{41}$$

由(41)式和第一章第二节三及四的引理，(10)式的整数解

可表示为：$x^2=0+bk, y+3=b+k$ (42)

k 是整数，但由于 x^2 的原因，k 要适当取值。

由(42)式和(34)式可得到：

$$x^2 = bk, y = k - b - 3, z = 2b + 4 - k \quad (43)$$

因 y 和 z 都取零以外的正整数，故有 $b + 3 < k < 2b + 4$，k 和 b 都是正整数，且 bk 等于一个平方米，或 b、k 各自等于一个平方数，而 $b > 3, k > 8$。

由于 $x^2 = bk$，如将(43)式中 b 和 k 都取为平方数，即得：$x^2 = (bk)^2$ 即 $x = bk, y = k^2 - b^2 - 3, z = 2b^2 + 4 - k^2$ (44)

而(44)式正是(39)式。

以上由(39)(40)式求得的 x,y,z 值，都可用(43)式求得，故(43)式是(32)式一切正整数解的表示式。

注：(44)式是(32)式一切整数解的表示式。也可由(44)式求出正整数解，但其中 k、b 的取值要通过

$$2b^2 + 4 > k^2 > b^2 + 3$$

例题二 求 $x^3 = 2y^2 + 5zy + 2z^2$ (45)

式的正整数解。

解：由(45)式得到 $x^3 = (2y + z)(2z + y)$ (46)

令 $2y + z = a, \quad 2z + y = b$ (47)

由(47)式得：$a - 2b = -3z$，即 $a = 2b - 3z$ (48)

由(46)(47)(48)得到：$x^3 = b(2b - 3z)$ (49)

设 $x^3 = (kv)^3$ k 和 v 都是正整数 (50)

由(49)(50)式和本章第二节引理得到：

$$x = kv, \quad y = \frac{2(kv)^3 - b^2}{3b} \quad z = \frac{2b^2 - (kv)^3}{3b} \quad (51)$$

因为 b 是 $(kv)^3$ 的一个因数，故 b 的选值有

$b = v^t, \quad v^t k^c$,

以 $b = v^t$ 代入(51)式得到：

$$x = kv \quad y = \frac{2(kv)^3 - v^{2t}}{3v^t}, z = \frac{2v^{2t} - (kv)^3}{3v^t} \quad (52)$$

以 $t = 1$ 代入(21)式得到：

$$x = kv, \quad y = \frac{v(2k^3v - 1)}{3}, \quad z = \frac{v(2 - k^3v)}{3} \tag{53}$$

易知上式的 z 没有正整数解。

以 $t = 2$ 代入(52)式得到：

$$x = kv, \quad y = \frac{v(2k^3 - v)}{3}, \quad z = \frac{v(2v - k^3)}{3} \tag{54}$$

以上 k 和 v 都是正整数，因 $y > 0, z > 0$，得到 $2k^3 > v > \frac{1}{2}k^3$，有 $k \geqslant 2$，v 要适当取值，由演算得到提示：

当 $k = 2$ 时，则 v 的选择范围是 5 至 15，

$k = 3$ 时，则 v 的选择范围是 14 至 53。

…………………………

以 $t = 3$ 代入(52)式得到：

$$x = kv, \quad y = \frac{2k^3 - v^3}{3}, \quad z = \frac{2v^3 - k^3}{3} \tag{55}$$

由上式易知，$k = v$，k 和 v 都是正整数，且都是 3 的倍数。

以 $t = 4$ 代入(52)式得到：

…………………【略】

以 $b = v^t k^c$ 代入(51)式得到：

$$x = kv, \quad y = \frac{2(kv)^3 - v^{2t}k^{2c}}{3v^t k^c}, \quad z = \frac{2(v^{2t}k^{2c}) - (kv)^3}{3v^t k^c} \tag{56}$$

以 $t = 1, c = 1$；$t = 2, c = 1$；$t = 3, c = 1$ 分别代入(56)式得到的 x, y, z 都没有通过的正整数解。

又仿题 1 的第二种方法，得到题 2 的通解式为：

$$x^3 = bk, \quad y = \frac{2k - b}{3}, \quad z = \frac{2b - k}{3}.$$

因 $y > 0, z > 0$，得到 $2b > k > \frac{1}{2}b$，b 和 k 都是正整数，且都等于 3 的倍数，可令 $x = 3m$，m 也是正整数，得到 $x^3 = 27m^3 = bk$，故有 $k = \frac{27m^3}{b}$，将其代入 $2b > k > \frac{1}{2}b$ 得到：

$$2b > \frac{27m^3}{b} > \frac{1}{2}b$$

上式如取 $m = 1$　　b 没有数值适合.

如取 $m = 2$　　得到 $b = 12$，$k = 18$【或 b、k 值交换】

如取 $m = 3$　　得到 $b = 27$，$k = 27$，

$m = 4$　　$b = 36$，$k = 48$【或交换值】

$m = 5$　　$b = 45$，$k = 75$【或交换值】

$m = 6$　　$b = 81$，$k = 72$【或交换值】

$m = 7$　　b 没有整数可取

$m = 8$　　$b = 96$，$k = 144$【或交换值】

$m = 9$　　b 没有整数可取

$m = 10$　　$b = 150$，$k = 180$【或交换值】

$m = 11$　　b 没有整数可取

$m = 12$　　$b = 162$，$k = 288$【或交换值】

$m = 13$　　b 没有整数可取

……　　………………

如取 $b = k$，由 $k^3 - bk$　得到 $(3m)^3 = b^2$【或 k^2】，其解为 $3m = c^2$，$b = c^3$，而 c 是整数且是3的倍数，令 $c = 3t$，t 是任意正整数，故 $b = k = (3t)^3$。

习题

1. 用本章第二节公式(8)求以下不定方程的正整数解：

(1) $x^3 = z^2 + y^2$　　已知 $x = 12$

(2) $z^2 = x^3 + y^4$　　已知 $z = 45$

2. 求 $3y^2 + 2zy + 2y \quad z^2 \quad 2z \quad x^2 \quad 1 = 0$ 的正整数解。

【提示：把 x^2 单独移到等号的一边，将另一边进行因式分解】

3. 求 $x^3 = y^2 + 3zy + 2z^2 \quad z \quad 1$ 的整数解。

【提示：将等号右边进行因式分解】

4. 求 $x^3 = y^2 + 50y$ 的正整数解。

第七章　关于 $x^n = y^2 + z^2$ 解的讨论

第一节　求 $x^3 = y^2 + z^2$ 的整数解

求　$x^3 = y^2 + z^2$　　(1)

式的整数解

这一方程的解的讨论，如果用第八章第一节的讨论方法，则它的解的第一个表示式就更容易求出来。

（一）在(1)式中，假设 x 是奇数，则 y 和 z 必是一奇一偶，

即：$y = 2m$，　$z = 2n + 1$　m 和 n 是正整数，将其代入(1)式得到：

$$x^3 = (2m)^2 + (2n+1)^2 = 4(m^2 + n^2 + n) + 1$$

即：$x^3 - 1 = 4(m^2 + n^2 + n)$　　(2)

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 4(m^2 + n^2 + n) \tag{3}$$

令 $x - 1 = H$　得到 $x = H + 1$　　(4)

由(3)(4)式整理得：

$$H^2 + 3H + 3 = \frac{4[(m^2 + n(n+1)]}{H} \tag{5}$$

因为 x 是奇数，由(4)式得知 H 是偶数，故(5)式的左边等于奇数，由(5)式得知 $H \geqslant 4$，因为若 $H = 2$，则(5)式的右边就等于偶数，这和假设 m、n 是整数发生矛盾，故知 $H \geqslant 4$、若 $H = 6$，则由(5)式有：

$$H^2 + 3H + 3 = \frac{4[m^2 + n(n+1)]}{6}$$

即 $H^2 + 3H + 3 = \frac{2[m^2 + n(n+1)]}{3}$

即 $3(H^2+3H+3)=2[m^2+n(n+1)]$ (6)

因为 H 是偶数，可知(6)式左边等于奇数，但这和右边等于偶数发生矛盾；依此类推，H 也不能等于8，推算结果，H 的适合数是：

$H=4,12,16,28,36,\cdots$

由此得到提示，H 值必须在4的倍数中选取，由(4)式和以上试算得到：

$$
\begin{aligned}
x=H+1&=4+1=5=2^2+1^2\\
&=12+1=13=3^2+2^2\\
&=16+1=17=4^2+1^2\\
&=28+1=29=5^2+2^2\\
&=36+1=37=6^2+1^2\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

根据以上提示，(1)式中，x 必等于二个整数的平方和，故可设 $x=a^2+b^2$，因为 x 是奇数，故 a 和 b 是一奇一偶。

假设我们以 $a=6,b=1$ 代入(2)式计算：

$(6^2+1)^3-1=4[m^2+n(n+1)]\Rightarrow \dfrac{37^3-1}{4}=m^2+n(n+1)$

$\Rightarrow 12663=m^2+n(n+1)$

上式中，因为 n 和 $(n+1)$ 是二个连续数，我们知道二个连续数的乘积的末位数字必是0,2,6三者之一，因此我们可以通过查数学用表，先查和12663接近的平方数，因为12663是奇数，得知上式中 m^2 必是奇数，而且这 m 的末位数字只有1和9才适合，按此情况查表得到111的平方数是12321，将12663减去12321得到342，而342等于 18×19，仿此又查得99的平方数是9801，将12663减9801得到2862，而2862等于 53×54，因此得知有二个不同的 m 和二个不同的 n，从而得到

$x=37,\quad \begin{cases}y_1=2m_1-222\\ z_1=2n_1+1-37,\end{cases}\quad \begin{cases}y_2=2m_2-198\\ z_2=2n_1+1-107\end{cases}$

这就是说，在(1)式的解中，每一个 x 值，y 和 z 的值却有二个。

按以上这种演算方法，在(1)式中先确定 x 值，然后通过(2)式去求出 y 和 z 值，那么，我们若以 $(a^2+b^2)^3$ 展开可得：

$$(a^2+b^2)^3=a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6 \qquad (7)$$

把(7)式的右端分解成二部份，使其每一部份等于一个多项式的平方数，则 y 和 z 的表示式就是这二个多项式。关于这个问题，留到后边再详细讨论。

(二) 在(1)式中，如果 x 是偶数，则 y 和 z 都是奇数，或者都是偶数。先证明 y 和 z 不能同时是奇数，如果 y 和 z 都是奇数，即令 $x=2f$，$y=2m+1$，$z=2n+1$，f、m、n 都是整数，代入(1)式得：$(2f)^3=(2m+1)^2+(2n+1)^2 \Rightarrow 8f^3=4(m^2+m+n^2+n)+2 \Rightarrow 4f^3=2(m^2+m+n^2+n)+1$ 得到 $4 \mid x^3$，$4 \nmid y^2+z^2$，这和假设矛盾，故 y 和 z 不能同时是奇数，因此，可假设 y 和 z 都是偶数，即：

$$x^3=y^2+z^2=4(m^2+n^2)$$

即 $x^3=4(m^2+n^2)$ (8)

因为 x 是偶数，由(8)式有 $8 \mid x^3 \Rightarrow 8 \mid 4(m^2+n^2)$，这时，如果 $m=n$，则得到 $y=z$，它不是本题的要求，故不予讨论，现在假设 m 是 n 的倍数，

令 $m=tn$，t 是大于1的整数，代入(8)式得到：

$$x^3=4[(tn)^2+n^2]=4n^2(t^2+1) \qquad (9)$$

在(9)式中，我们有以下四种情况：

1. 令 $x=2$，则 $x^2=2n^2(t^2+1)$

   显然得到唯一解为 $n=t=1$

由于 $t=1$，得到 $m=n$，$y=z$，【可舍去】

2. 令 $x=4$ 则 $x^2=n^2(t^2+1)$

   因为 t^2+1 不等于一个平方数，故上式无解，【也舍去】

3. 令 $x=n^2$ 则 $x^2=4(t^2+1)$，此式因4是个平方数，同上理，此式也无解。

4. 令 $x = n$，则 $x^2 = 4n(t^2 + 1)$

把前式代入后式整理得到 $n = 4(t^2 + 1)$，于是有：

$$x = 4(t^2 + 1), y = 2m = 8t(t^2 - 1),$$

$$z = 2n = 8(t^2 + 1) \qquad (10)$$

由第六章第二节【引理 A】和(10)式，我们以 2^2 去除 x，以 2^3 去除 y 和 z 得到

$$x = t^2 + 1, \quad y = t(t^2 - 1), \quad z = t^2 + 1 \qquad (11)$$

其中 $t > 1$，若 t 是奇数，则 x 是偶数，若 t 是偶数，则 x 是奇数。但(11)式中的 y 和 z，只是(1)式解的一个表示式，它还有第二个表示式，我们可按照本节(一)的演算方法，先求出解的各个值，然后再用逆推法去推导第二个表示式。经过逆推【其方法在本章第三节专题讨论】可得到(1)式一切解由以下各式表示出来：

$$x = a^2 + b^2 \qquad \begin{cases} y_1 = b(a^2 + b^2) \\ z_1 = a(a^2 + b^2) \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2 = b(3a^2 - b^2) \\ z_2 = a(a^2 - 3b^2) \end{cases}$$

其中 a 和 b 是任意整数。

第二节　求 $x^5 = y^2 + z^2$ 的整数解

求 $x^5 = y^2 + z^2 \qquad (12)$

式的解

(一) 用本章第一节(一)的方法，由(12)式可得到：

$$\frac{x^5 - 1}{4} = m^2 + n(n + 1) \qquad (13)$$

为了探讨(12)式中，同一 x 值时，有多少个 y 和 z 值，我们再演算如下：

设 $x = a^2 + b^2$　　取 $a = 2, b = 1$　代入(13)式得到：

$$\frac{5^5 - 1}{4} = 781 = m^2 + n(n + 1)$$

查表得到　$781 = 25^2 + 12 \times 13$

$$781 = 19^2 + 20 \times 21$$

$$781 = 5^2 + 27 \times 28$$

即 $m_1 = 25,\quad n_1 = 12$

$m_2 = 19,\quad n_2 = 20$

$m_3 = 5,\quad n_3 = 27$

故(12)式中,当 $x = 5$ 时,有:

$y_1 = 2m_1 = 50,\qquad z_1 = 2n_1 + 1 = 25$

$y_2 = 2m_2 = 38,\qquad z_2 = 2n_2 + 1 = 41$

$y_3 = 2m_3 = 10,\qquad z_2 = 2n_3 + 1 = 55$

由以上演算得知(12)式中,同一 x 值,y 和 z 各有三个。

(二)由本章第一节的(9)式,(12)式有:

$$x^5 = 4n^2(t^2 + 1) \tag{14}$$

令 $x = t^2 + 1$ 时,则 $x^4 = 4n^2 \to x^2 = 2n$

把前式代入后式得到:

$$(t^2 + 1)^2 = 2n$$

将上式代入 $y = 2tn$ 得到 $y = t(t^2 + 1)^2$

又因 $z = 2n$, $\therefore z = (t^2 + 1)^2$

故得到(12)式一组解的表示式为:

$$x = t^2 + 1 \qquad y = t(t^2 + 1)^2 \qquad z = (t^2 + 1)^2$$

其中 t 是大于1的整数。

既然(12)式中,同一 x 值,y 和 z 各有三个,上面这个表示式也仅是其中之一,还要用逆推法去推导出其余二个【推导方法见本章第三节】,经推导最后得到(12)式一切解的表示式为:

$x = a^2 + b^2 \quad y_1 = a(a^2 + b^2)^2 \quad z_1 = b(a^2 + b^2)^2$

$y_2 = a(a^4 - 2a^2b^2 - 3b^4) \quad z_2 = b(3a^4 + 2a^2b^2 - b^4)$

$y_3 = a(a^4 - 10a^2b^2 + 5b^4) \quad z_3 = b(5a^4 - 10a^2b^2 + b^4)$

其中 a 和 b 是任意整数。

第三节　关于 $x^n = y^2 + z^2$ 解的表示式的推导问题

关于 $x^n = y^2 + z^2$　　(15)

式解的表示式的推导问题

从本章第一节和第二节的求证过程中，将各个解的表示式，进行对照和由演算得到提示，我们总结出以下几条规律：

1. 不论 n 是奇数或偶数，x 的表示式都是

$$x = a^2 + b^2$$

2. (15) 式的解中，同一 x 值，y 和 z 的表示式各有 u 个，即 $\frac{n+1}{2} = u$【注：n 是奇数时，分子是 $n+1$，n 是偶数时，分子是 n】

3. 当 n 是奇数时，

(1) y 和 z 的表示式，其括号内各项的系数，是互相倒排的；

(2) 第一个 y 的表示式是 $y_1 = a(a^2+b^2)^{\frac{n-1}{2}}$，第一个 z 的表示式是 $z_1 = b(a^2+b^2)^{\frac{n-1}{2}}$

(3) 第二个 y 和 z 的表示式，其括号内首项系数和末项系数分别为 1 和 3；第三个 y 和 z 的表示式，其括号内首项系数和末项系数分别为 1 和 5；第四个 y 和 z 的表示式，其括号内首项系数和末项系数分别为 1 和 7。其余类推，则第 i 个 y 和 z 的表示式，其括号内首项系数和末项系数分别为 1 和 $2i-1$。

现在讨论解的表示式的推算问题

本章第一、二节中曾讲过，当 n 是奇数时，(15) 式的解都可通过

$$\frac{x^n - 1}{4} = m^2 + n(n+1) \qquad (A)$$

式先求出 m 和 n，然后再代入 $y = 2m$，$z = 2n + 1$，但是这个演算法，比较费时，应该求证出解的表示式，现讨论如下。

先从本章中曾经讨论过的 $x = t^2 + 1$ 进行推算。在讨论 $x^3 = y^2 + z^2$ 式时，已经求证出一组解的表示式是：$x = t^2 + 1$　$y_1 = t^2 + 1$　$z_1 = t(t^2 + 1)$，以 $t = 2$，即 $x = 2^2 + 1 = 5$，代入(A)式经过演算得到 $y_1 = 5$，$z_1 = 10$，$y_2 = 2$，$z_2 = 11$，其中 $y_1 = 5$，$z_1 = 10$，就是由第一个表示式计算得来的，我们将 $(t^2 + 1)^3$ 式用代数公式展开得：

$$t^6 + 3t^4 + 3t^2 + 1 \qquad (B)$$

如何把(B)式分解为两个多项式，且每一个多项式都等于一个多项式的平方数。根据前面演算的情况和以上所说的规律，推导如下：

从(B)式看，它有一项常数，由已知的 $z_2 = 11$ 看，11 是奇数，可以设想，在 z_2 的表示式中，必有一项常数项为 1；(B)式的最高方次项是 t^6，如果把 t^6 开平方，则出现 t^3，但(B)式中没有 t^3，由此可推知这二个多项式中，至少有一个是用 t^2 去乘 t^4，由此又可推知有一个多项式是形如 $t^2(t^2 \pm \cdots)^2$【此式开平方后为 $t(t^2 \pm \cdots)$。】由于已知 $y_2 = 2$，$t = 2$，可知形如 $t(t^2 \pm \cdots)$ 式是适合 y_2 的需要的，由此推测 $(t^2 \pm \cdots)$ 就只能等于 1，于是可得到 $y_2 = 2 = t(t^2 - 3)$，将其代入(15)式验算，即：

$$(t^2 + 1)^3 - [t(t^2 + 1)]^2 = 9t^4 - 6t^2 + 1 = (3t^2 - 1)^2$$

经验证无误，故得到 $x^3 = y^2 + z^2$ 的解的第二个表示式为

$$y_2 = t(t^2 - 3) \quad z_2 = 3t^2 - 1$$

把 $x = a^2 + b^2$ 和 $x = t^2 + 1$ 对照，可知 a^2 即 t^2，b^2 即 1，于是可得：$y_2 = a(a^2 - 3b^2)$　$z_2 = b(3a^2 - b^2)$【注：由于 y^2 和 z^2 都是平方数，故在表示式中如果出现 y 和 z 等于负数时，并不妨碍原式解的正确性。】

上式为什么将常数 3 和 1 套为 $3b^2$ 和 b^2 呢？可以通过实例来证

明，例如将 $a=2, b=3$ 代入 x 的表示式得到 $x=a^2+b^2=13$，再将13代入(A)式演算得到 $y_2=9, z_2=46, y_1=39, z_1=26$。又经过试算只有以 $3b^2$ 和 b^2 套为3和1，才能得到 $y_2=9, z_2=46$，有了这二个表示式我们就解决了原式一切解的问题。

我们再推算本章第二节中一组解的表示式。

当 $x=5$ 时，则有 $y_1=50,\quad z_1=25,$

$$y_2=38,\quad z_2=41,$$

$$y_3=10,\quad z_3=55.$$

在本章第二节(二)中已得到第一个表示式为：

$$y_1=t(t^2+1)^2=2(2^2+1)^2=50$$

$$z_1=(t^2+1)^2=(2^2+1)^2=25.$$

那么，如何再推算出其余二个表示式呢？先由代数公式将 $(t^2+1)^5$ 展开：

$$t^{10}+5t^8+10t^6+10t^4+5t^2+1 \qquad (C)$$

(C)式中，有常数项1，首项 t^{10}。显然在 y 和 z 的表示式中必有一个形如 $t(t^4\pm\cdots)$，因为 $y_2=38, y_3=10$，都是偶数，而且 $t=2$，故知 $t(t^4\pm\cdots)$ 必是 y_2 和 y_3 的形式，若以 $t(t^4\pm\cdots)=10$，则因 $2(2^4\pm\cdots)=10$，可得到 $(2^4\pm\cdots)=5$，由于(C)式中有 t^6, t^4，故知必有 $(t^4\pm Rt^2\pm h)=5$【其中 R 和 h 是待定的整数】，显然 h 必然是一个常数，而且是奇数，推算结果 $h=3$，将它代入验算，最后得到 $t(t^4-2t^2-3)=10$.

$$\because (t^2+1)^5-[t(t^4-2t^2-3)]^2=9t^8+12t^6-2t^4-4t^2+1=(3t^4+2t^2-1)^2$$

$$\therefore \text{得到 } y_2=t(t^4-2t^2-3),\ z_2=(3t^4+2t^2-1)$$

用同样方法可推得：

$$y_3=t(t^4-10t^2+5),\quad z_3=(5t^4-10t^2+1)$$

同上理可得到

$$y_1=a(a^2+b^2)^2 \qquad z_1=b(a^2+b^2)^2$$

$$y_2 = a(a^4 - 2a^2b^2 - 3b^4),\quad z_2 = b(3a^4 + 2a^2b^2 - b^4)$$
$$y_3 = a(a^4 - 10a^2b^2 + 5b^4),\quad z_3 = b(5a^4 - 10a^2b^2 + b^4)。$$

其中a和b是任意整数。$a \neq b$。

附 《引理C》的求证

《引理C》 为了简化对解的表示式逐个推算的过程，特加《引理C》并证明如下：

在 $x^v = y^2 + z^2$ (16)

式中，若 $x = c,\quad y = a,\quad z = b$ (17)

式是满足(16)式的一组解，则

$$x^{v+2} = y^2 + z^2 \qquad (18)$$

式的一组解为：

$$x = c,\quad y = ac,\quad z = bc \qquad (19)$$

证：以(17)式代入(16)式得到：

$$c^v = a^2 + b^2 \qquad (20)$$

以c^2乘(20)式的二边得到

$$x^{v+2} = c^{v+2} = (a^2 + b^2)c^2 = a^2c^2 + b^2c^2 = (ac)^2 + (bc)^2 = y^2 + z^2,$$

故《引理C》得证。

由以上推算过程，可知在(15)式中，当n等于奇数时，可由“推算规律”推出最末一个解的表示式【只须推出最末一个，因为其余的表示式，可由$x^{n-2} = y^2 + z^2$式的表示式和《引理C》直接求得】当n等于偶数时，可用勾股定理和《引理C》推算，这样(15)式的一切解的问题，就完全可以解决了。

例如：

$x^3 = y^2 + z^2$的解中y和z的二个表示式是：

$$\begin{cases} y_1 = a(a^2 + b^2) \\ z_1 = b(a^2 + b^2) \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2 = a(a^2 - 3b^2) \\ z_2 = b(3a^2 - b^2) \end{cases}$$

至于$x^5 = y^2 + z^2$式，它的解共有三个表示式，其中第一个和第二个，可由$n = 3$时的表示式【即上式】和《引理C》得到

$$\begin{cases} y_1 = a(a^2+b^2)^2 \\ z_1 = b(a^2+b^2)^2, \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 = a(a^2-3b^2)(a^2+b^2) \\ z_2 = b(3a^2-b^2)(a^2+b^2) \end{cases}$$

第三个表示式须用逆推法求得：

$$\begin{cases} y_3 = a(a^4-10a^2b^2+5b^4) \\ z_3 = b(5a^4-10a^2b^2+b^4) \end{cases}$$

又如 $x^4=y^2+z^2$ 的二个表示式中，第一个是由勾股定理和《引理C》得到，第二个是由勾股定理重复运用得到，即：

$$\begin{cases} y_1 = 2ab(a^2+b^2) \\ z_1 = (a^2-b^2)(a^2+b^2) \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 = 2(2ab)(a^2-b^2) \\ z_2 = (2ab)^2-(a^2-b^2)^2 \end{cases}$$

现在可以将 n 等于奇数时和 n 等于偶数时 y 和 z 的表示式分别列出如下：

1. $x^{n(奇数)}=y^2+z^2$ 式中 y 和 z 的表示式是：

$$\begin{cases} y_1 = a(a^2+b^2)^{\frac{n-1}{2}} \\ z_1 = b(a^2+b^2)^{\frac{n-1}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = a(a^2-3b^2)(a^2+b^2)^{\frac{n-3}{2}} \\ z_2 = b(3a^2-b^2)(a^2+b^2)^{\frac{n-3}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_3 = a(a^4-10a^2b^2+5b^4)(a^2+b^2)^{\frac{n-5}{2}} \\ z_3 = b(5a^4-10a^2b^2+b^4)(a^2+b^2)^{\frac{n-5}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_4 = a(a^6-21a^4b^2+35a^2b^4-7b^6)(a^2+b^2)^{\frac{n-7}{2}} \\ z_4 = b(7a^6-35a^4b^2+21a^2b^4-b^6)(a^2+b^2)^{\frac{n-7}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_5 = a(a^8-36a^6b^2+126a^4b^4-84a^2b^6+9b^8)(a^2+b^2)^{\frac{n-9}{2}} \\ z_5 = b(9a^8-84a^6b^2+126a^4b^4-36a^2b^6+b^8)(a^2+b^2)^{\frac{n-9}{2}} \end{cases}$$

··

$$\begin{cases} y_t = a(F_1a^{2t-2}-F_2a^{2t-4}b^2+F_3a^{2t-6}b^4-\cdots\pm F_tb^{2t-2})(a^2+b^2)^{\frac{n-(2t-1)}{2}} \\ z_t = b(F_ta^{2t-2}-F_{t-1}a^{2t-4}b^2+F_{t-2}a^{2t-6}b^4-\cdots\pm b^{2t-2})(a^2+b^2)^{\frac{n-(2t-1)}{2}} \end{cases}$$

2. $x^{n(偶数)}=y^2+z^2$ 式解中 y 和 z 的表示式是：

$$\begin{cases} y_1=2ab(a^2+b^2)^{\frac{n-2}{2}} \\ z_1=(a^2-b^2)(a^2+b^2)^{\frac{n-2}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2=2(2ab)(a^2-b^2)(a^2+b^2)^{\frac{n-4}{2}} \\ z_2=[(2ab)^2-(a^2-b^2)^2](a^2+b^2)^{\frac{n-4}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_3=2ab(a^2-3b^2)(3a^2-b^2)(a^2+b^2)^{\frac{n-6}{2}} \\ z_3=\{[a(a^2-3b^2)]^2-[b(3a^2-b^2)]^2\}(a^2+b^2)^{\frac{n-6}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_4=2\times 2(2ab)(a^2-b^2)[(2ab)^2-(a^2-b^2)^2](a^2+b^2)^{\frac{n-8}{2}} \\ z_4=\{[2(2ab)(a^2-b^2)]^2-[(2ab)^2-(a^2-b^2)^2]^2\}(a^2+b^2)^{\frac{n-8}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_5=2ab(5a^4-10a^2b^2+b^4)(a^4-10a^2b^2+5b^4)(a^2+b^2)^{\frac{n-10}{2}} \\ z_5=\{[a(a^4-10a^2b^2+5b^4)]^2-[b(5a^4-10a^2b^2+b^4)]^2\}(a^2+b^2)^{\frac{n-10}{2}} \end{cases}$$

……………………………………

$$\begin{cases} y_t=ab(F_1a^{2t-2}-F_2a^{2t-4}b^2+F_3a^{2t-6}b^4-\cdots\pm F_tb^{2t-2})(a^2+b^2)^{\frac{n-2t}{2}} \\ z_t=(F_1a^{2t}-F_2a^{2t-2}b^2+F_3a^{2t-4}b^4-\cdots\pm F_{t+1}b^{2t})(a^2+b^2)^{\frac{n-2t}{2}} \end{cases}$$

以上(15)式中，y_t 和 z_t 的表示式可由杨辉三角计算得到。

附　杨辉三角【有些书叫贾宪三角】

由 $(a+b)^k$ 展开的各项系数依次是：$k=0,1,2,3$……

1

1　1

1　2　1

1　3　3　1

1　4　6　4　1

1　5　10　10　5　1

1　6　15　20　15　6　1

1　7　21　35　35　21　7　1

1　8　28　56　70　56　28　8　1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1

1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1

1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1

1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1

…………………………………………………………

在$(a+b)^k$式中的k和y_t(或z_t)中的t，其关系是，当n是奇数时$k=2t-1$，当n是偶数时，$k=2t$。例如：n是奇数时，第四个表示式，即$t=4$，得到$k=2t-1=7$，在"三角"中，y_4括符内的系数是：1，21，35，7(即奇数项)；z_4括符内的系数是：7，35，21，1(即偶数项)。又如n是偶数时，第四个表示式，即$t=4$得到$k=2t=8$，在"三角"中z_4括符内的系数是：1，28，70，28，1(即奇数项)；y_4括符内的系数是：8，56，56，8(即偶数项)。各系数前面的正负符号，则按先正后负，交换下去。

将$x^{n(\text{偶数})}=y^2+z^2$式的表示式$\begin{cases}y_4\\z_4\end{cases}$的右端整理可得：

$$\begin{cases}y_4=ab(8a^6-56a^4b^2+56a^2b^4-8b^6)(a^2+b^2)^{\frac{n-2t}{2}}\\z_4=(a^8-28a^6b^2+70a^4b^4-28a^2b^6+b^8)(a^2+b^2)^{\frac{n-2t}{2}}\end{cases}$$

其余的表示式，请读者仿此演算验证。

这样，(15)式解的表示式，就可以借助于杨辉三角的计算，省去了本节开始时关于推导的方法了。

再举例如下：

(1) 求$x^{12}=y^2+z^2$式第六个解的表示式。

解： 由于$t=6$，得到$k=2t=12$，即在"三角"中取$(a+b)^{k=12}$展开的各项系数分别代入n是偶数时最后这个表示式的公式得到：

$$\begin{cases} y_4 = ab(12a^{10} - 220a^8b^2 + 792a^6b^4 - 792a^4b^6 + 220a^2b^8 \\ \qquad - 12b^{10})(a^2 + b^2)^{\frac{12-12}{2}=0} \\ z_6 = (a^{12} - 66a^{10}b^2 + 495a^8b^4 - 924a^6b^6 + 495a^4b^8 \\ \qquad - 66a^2b^{10} + b^{12})(a^2 + b^2)^{\frac{12-12}{2}=0} \end{cases}$$

(2) 求 $x^{13} = y^2 + z^2$ 式第七个解的表示式。

解 由于 $t = 7$，得到 $k = 2t - 1 = 13$，即在"三角"中取 $(a + b)^{k=13}$ 展开的各项系数分别代入 n 是奇数时最后这个表示式的公式得到：

$$\begin{cases} y_7 = a(a^{12} - 780a^{10}b^2 + 715a^8b^4 - 1716a^6b^6 + 1287a^4b^8 \\ \qquad - 28a^2b^{10} + 13b^{12})(a^2 + b^2)^{\frac{13-13}{2}=0} \\ z_7 = b(13a^{12} - 286a^{10}b^2 + 1287a^8b^4 - 1716a^6b^6 + 715a^4b^8 \\ \qquad - 78a^2b^{10} + b^{12})(a^2 + b^2)^{\frac{13-13}{2}=0} \end{cases}$$

第四节 求 $x^n = y^2 - z^2$ 的解的表示式

求 $x^n = y^2 - z^2$ (21)

式的解

本题在第六章第二节中虽然讨论过，但它的解的表示式(8)，要以 $b = v^t, v^tk^t$ 逐个代入转换为(28)和(29)，同时 v 和 k 还要适当取值，这种演算比较困难，因此，本节再仿本章第二节的方法，直接给出容易计算的解的表示式。

如同前面讨论的一样，取 x 为奇数。我们知道，任何大于1的奇数，都等于二个整数的平方差，例如

$3 = 2^2 - 1^2$

$5 = 3^2 - 2^2$

$7 = 4^2 - 3^2$

$9 = 5^2 - 4^2$

$11 = 6^2 - 5^2$

………………

故本节讨论中，只取 $x = a^2 + b^2$

当 $n = 2$ 时，容易知道，(21) 式可由勾股数求得，即

$$x = a^2 + b^2, \quad y = a^2 - b^2, \quad z = 2ab$$

当 $n = 3$ 时，即 $x^3 = y^2 + z^2$ (22)

的解。

由《引理 C》和(22) 式，得到一个解为：$x = a^2 + b^2$，

$$\begin{cases} y_1 = a(a^2 + b^2) \\ z_1 = b(a^2 + b^2) \end{cases}$$

至于 y_2 和 z_2 的表示式，可用同上节的推算规律，先将 $(a^2 - b^2)^3$ 用代数公式展开得到：

$$a^6 - 3a^4b^2 + 3a^2b^4 - b^6 \qquad (A)$$

y_2 和 z_2 的表示式，分别形如：

$$\left.\begin{aligned} y_2 &= a(a^2 \pm kb^2) \\ z_2 &= b(ka^2 \pm b^2) \end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

(B) 中的 k 是待定的整数，(A) 式的首项，已由 y_2 式中 $a^2 \times (a^2)^2 = a^6$ 给出，第二项，则将 (B) 式的 y_2 和 z_2 中找出含有 a^4b^2 者，即：由 y_2 找得 $a^2 \times a^2 \times (\pm kb^2) = \pm ka^4b^2$，又由 z_2 找得 $b^2 \times (ka^2)^2 = k^2a^4b^2$，于是得到一方程为：

$2[\pm ka^4b^2] - [k^2a^4b^2] = -3a^4b^2$

简为 $\pm 2k - k^2 = -3$

故得到 $k = 3$

至于(A) 式第三项 $3a^2b^4$，即在 y_2 和 z_2 中找出含有 a^2b^4 者，由于已取得 $k = 3$，故在 y_2 中有 $a^2(3b^2)^2 = 9a^2b^4$，z_2 式中有 $2 \times 3a^2 \times \pm$

$b^4 = \pm 6a^2b^4$，于是得到一方程为：

$$9a^2b^4 - (\pm 6a^2b^4) = 3a^2b^2$$

简为 $9 - (\pm 6) = 3$，

故知上式左边括号内应取加号。

至于(A)式中的第四项，已由 z_2 式中 $b^2(b^2)^2$ 给出。

由此得到(22)式第二个表示式为：

$$\begin{cases} y_2 = a(a^2 + 3b^2) \\ z_2 = b(3a^2 + b^2) \end{cases}$$

我们将 $x^3 = y^2 + z^2$ 式和 $x^3 = y^2 - z^2$ 式，它们解的第二个表示式对照，可以得到后者括号内全部取加号。

当 $n = 4$，即 $x^4 = y^2 - z^2$ (23)

的解。

将(23)改写成 $(x^2)^2 = y^2 - z^2$ (24)

将(24)移项：$y^2 = (x^2)^2 + z^2$ (25)

由勾股定理和(25)式，我们有

$$y = c^2 + d^2,\quad z = 2cd,\quad x^2 = c^2 - d^2 \tag{26}$$

在(26)的第三式，即 $x^2 = c^2 - d^2$ 式中，用同样方法可得：

$$x = a^2 - b^2, c = a^2 + b^2, d = 2ad \tag{27}$$

将(27)代入(26)得到：

$$y_2 = (2ab)^2 + (a^2 + b^2)^2,\quad z_2 = 2(2ab)(a^2 + b^2)$$

我们将 $x^4 = y^2 + z^2$ 式和 $x^4 = y^2 - z^2$ 式，它们解的第二个表示式对照，同样也只须把后者括号内全部取加号，且把 y 和 z 的值互相转换。由此得到(21)式解的表示式是

$x^{n奇数} = y^2 + z^2$ 解的表示式：

$$\begin{cases} y_1 = a(a^2 + b^2)^{\frac{n-1}{2}} \\ z_1 = b(a^2 + b^2)^{\frac{n-1}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = a(a^2+3b^2)(a^2-b^2)^{\frac{n-3}{2}} \\ z_2 = b(3a^2+b^2)(a^2-b^2)^{\frac{n-3}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_3 = a(a^4+10a^2b^2+5b^4)(a^2-b^2)^{\frac{n-5}{2}} \\ z_3 = b(5a^4+10a^2b^2+b^4)(a^2-b^2)^{\frac{n-5}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_4 = a(a^6+21a^4b^2+35a^2b^4+7b^6)(a^2-b^2)^{\frac{n-7}{2}} \\ z_4 = b(7a^6+35a^4b^2+21a^2b^4+b^6)(a^2-b^2)^{\frac{n-7}{2}} \end{cases}$$

………………………………

$x^{n偶数} = y^2 - z^2$ 解的表示式：

$$\begin{cases} y_1 = (a^2+b^2)(a^2-b^2)^{\frac{n-2}{2}} \\ z_1 = 2ab(a^2-b^2)^{\frac{n-2}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = [(2ab)^2+(a^2+b^2)^2](a^2-b^2)^{\frac{n-4}{2}} \\ z_2 = 2(2ab)(a^2+b^2)(a^2-b^2)^{\frac{n-4}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_3 = \{[a(a^2+3b^2)]^2+[b(3a^2+b^2)]^2\}(a^2-b^2)^{\frac{n-6}{2}} \\ z_3 = 2ab(a^2+3b^2)(3a^2+b^2)(a^2-b^2)^{\frac{n-6}{2}} \end{cases}$$

………………

《附言两则》

（一）在(21)式中，$n = 3$时，取x为偶数，如$a = 3$，$b = 1$代入第一个表示式得到：$x = a^2 - b^2 = 9 - 1 = 8$，$y_1 = a(a^2 - b^2) = 24$，$z_1 = b(a^2 - b^2) = 8$，由第六章第二节《引理$A$》以$2^2$去除$x$的解得到$x = 2$，以$2^3$去除$y$和$z$的解得到$y = 3$，$z = 1$，同理，可得：

"$x = 2M^2$，$y = 3M^3$，$z = M^3$，其中M是整数"也是$x^3 = y^2 - z^2$式的解的表示式，但这个表示式是由"$x = a^2 - b^2$，$y = a(a^2 - b^2)$，$z = b(a^2 - b^2)$"导出来的，其它各个表示式，也具有此种情况，不须重复。

（二）实际上，在(21)式中，当$n > 2$时，它的解是无穷多个，凡

大于1的任一整数，都是 x 的解。在确定 x 值后，将 x^n 分解为二个同奇偶但不相等的因数，这二个因数之和除以2就是 y 值，之差除以2就是 z 值，因此，同一个 x 值，y 和 z 的值的个数等于将 x^n 能分解为每组同奇偶但不相等的二个因数时的组数。以上(21)式所列的解的表示式，只不过是从(15)式的解的表示式中对照推导得到的一部份。

习题

1. 用本章第二节之(一)的讨论方法，在 $x^5 = y^2 + z^2$ 式中，当 $x = a^2 + b^2$，而 $a = 3, b = 2$ 时，通过

$$\frac{x^5 - 1}{4} = m^2 + n(n+1) \text{ 式}$$

查平方根表，算出 y 和 z 的一切解。然后再用第二节之(二)的公式验证。

2. 用本章第三节的"推算规律"推导出 $x^7 = y^2 + z^2$ 式解的表示式。

3. 用本章第三节《引理 C》和已知方程中 $n < 6$ 时解的公式，再算出 $x^6 = y^2 + z^2$ 式解的表示式。

4. 已知不定方程 $x^9 = y^2 - z^2$ 的一组解为 $x = 3, y = 3282, z = 3279$，试算出这组解的表示式来。

第八章　关于 $x^n = y^3 + z^3$ 解的讨论

在本题讨论之前，先回顾第七章中曾经讨论过的，即在形如 $x^n = y^2 + z^2$ 式中，当 $n > 2$ 时，同一个 x 值，都有若干个不同的 y 和 z 值，即有 $y_1, y_2, z_1, z_2, \cdots\cdots$【它们的个数由方程中的 n 决定】那

么，本章是否也存在同样的情况呢？用第七章第二节（一）的方法进行探索和验证，结果都未发现 y、z 多值，例如在 $x^4 = y^3 + z^3$ 式中，已知 $x = 9$，得到 $x^4 = 9^4 = 6561$，经过查表验证，它只等于二个整数的立方数之和，即 $y^3 = 18^3 = 5832$，$z^3 = 9^3 = 729$。又如在 $x^7 = y^3 + z^3$ 式中，已知 $x = 9$，得到 $x^7 = 9^7 = 4782969$，经过查表验证，它也只等于二个整数的立方之和，即 $y^3 = 162^3 = 4251488$，$z^3 = 81^3 = 531441$。当然这个验证，并不能下结论说，凡是这类方程，它的右边二数的方次大于2时都如此，但可以肯定，当方程有解时，必有一个形如 y_1 和 z_1【第七章中所列】的表示式。从本章起，仅就这个表示式进行讨论，以后没有特别声明，所指"解"或"解的表示式"都只指这个表示式，而不是方程一切解的表示式。

另一个问题，就是关于 $x^n = y^n + z^n$【$n > 2$】无解的问题，这是著名的费马大定理，如果我们已经证明了 $n = 3, n = 4$ 时方程无解，这还不够，还要证明 $n = 5, 7, 11, 13, \cdots$ 时都无解，就是说要证明 n 等于素数时无解，可是素数有很多个，而且是无限多个，如果要逐一去证明它，实际上是不可能的。现在先做一个设想，在形如 $x^n = y^m + z^m$ 中【$m > 2, m \neq n$】，当 $(n, m) = 1$ 时，方程就有解，否则就无解，要解决这个问题，实际上就是如何解的问题。从本章起，就专门讨论这个问题。

第一节　求 $x^4 = y^3 + z^3$ 的整数解

求　$x^4 = y^3 + z^3$　　(1)

的整数解【以后均简称为"解"】

解：仿照第七章第四节（一）的方法，在 $x = y^3 + z^3$ 的方程中，很容易得到它的解是 $x = a^3 + b^3$，$y = a$，$z = b$，a 和 b 是整数【下同】。这时我们可以由第七章第三节《引理 C》得到(1)式的解为

$$x = a^3 + b^3, \quad y = a(a^3 + b^3), \quad z = b(a^3 + b^3)。$$

同理可得 $x^{4+3=7}=y^3+z^3$ (2)

式的解为

$$x=a^3+b^3,\quad y=a(a^3+b^3)^2,\quad z=b(a^3+b^3)^2。$$

由本节演解可以得到以下结论：

《引理 d》 凡方程为形如

$$x^{n=mk+1}=y^m+z^m \tag{3}$$

式时，则它的解的表示式是：

$$x=a^m+b^m,\quad y=a(a^m+b^m)^k,\quad z=b(a^m+b^m)^k$$

【m、n、k 也是止整数】

第二节 求 $x^2=y^3+z^3$ 的整数解

求 $x^2=y^3+z^3$ (4)

式的解。

解： 令 $x=x_0^2$ 代入(4)式得到

$$x_0^4=y^3+z^3 \tag{5}$$

由本章第一节的讨论得到(5)式的解为

$$x_0=a^3+b^3,\quad y=a(a^3+b^3),\quad z=b(a^3+b^3)$$

因为 $x=x_0^2=(a^3+b^3)^2$，从而得到(4)式解为：

$$x=(a^3+b^3)^2,\quad y=a(a^3+b^3),\quad z=b(a^3+b^3)。$$

以上这个解的表示式，如果要求在(4)式中取 x 最小正整数时，【或者说(4)式的解为最小正整数】，它就不能直接给出，但可以由它导出最小的解。例如

以 $a=2$，$b=1$ 代入得到：

$x=(2^3+1)^2=81$，$y=a(a^3+b^1)=18$，$z=b(a^3+b^3)=9$，

再由第六章第二节《引理 A》，我们以 $M^3=27$ 去除 81，又以 $M^2=9$ 去除 18 和 9，就可以得到(4)式的最小正整数解为 $x=3$，$y=2$，$z=1$。因此，又可由此导出(4)式一组解为：$x=3M^3$，$y=$

$2M^2$，$z=M^2$，其中 M 是任意整数。同理如果以 $a=3$，$b=1$ 代入得到 $x=784$，$y=84$，$z=28$，再以 $M^3=8$ 去除 784，以 $M^2=4$ 去除 84 和 28，则得到 $x=98$，$y=21$，$z=7$，因此又可导出(4)式一组解为 $x=98M^3$，$y=21M^2$，$z=7M^2$，M 是任意整数。其余类推。

第三节　试证 $x^3=y^3+z^3$ 无正整数解

试证： $x^3=y^3+z^3$ (6)

式无零外的正整数解。【以下简称解】

证：将(6)式移项为：

$$z^3=x^3-y^3 \tag{7}$$

由第六章第二节的方法，将(7)右端因式分解为：

$$z^3=(x-y)(x^2+xy+y^2) \tag{8}$$

令：【本题中所引用的代数都是整数】

$z=kv$

$x-y=b$，得到 $y=x-b$

$x^2+xy+y^2=a$　　(9)

$a-b^2=3xy$　得到 $a=b^2+3xy$

由(7)(8)(9)得到：

$$(kv)^3=ab=b(b^2+3xy) \tag{10}$$

整理变形为：

$$\frac{(kv)^3-b^3}{3b}=xy=x(x-b) \tag{11}$$

由(10)和(11)知道 b 是 $(kv)^3$ 的一个因数，若 $k>v$，则 $b<kv$，并有 $b=v,v^2,v^3$；若 $k=v$，则唯有 $b=v$，且易知，在(11)式中，若 $b=v^2,v^3$ 时，(11)式有解，则 $b=v$ 时，(11)式也必有解，故先讨论(11)式中，$b=v$ 时的情况。

以 $b=v$ 代入(11)式整理得：

$$\frac{v^2(k^3-1)}{3}=x(x-v) \tag{12}$$

在(12)式中，要么是 $3|v^2$，要么是 $3|k^3-1$，要么是二者兼有。

先讨论 $3|v^2$，

令 $3m=v^2 \Rightarrow 3n=v$，m 和 n 都是整数，代入(12)式整理得：

$3n^2(k^3-1)=x^2-3nx$，并代入求根公式：

$$x=\frac{3n\pm\sqrt{9n^2+4\times 3n^2(k^3-1)}}{2\times 1}$$

$$=\frac{3n\pm n\sqrt{9+12(k^3-1)}}{2} \tag{13}$$

在(13)式中，令 $r^2=9+12(k^3-1)$

即 $r^2=3[3+4(k^3-1)]$

又令 $r=3r_1$，代入上式整理移项：

$$3(r_1^2-1)=4(k^3-1) \tag{14}$$

在(14)式中，因 $(3,4)=1$，故有 $3|k^3-1$ 和 $4|r_1^2-1$，由此得知，若(12)式有解，则必有 $3|k^3-1$。

再讨论在(12)式中，取 $3|k^3-1$ 的情况，令 $3m_1=k^3-1$ 代入(12)式整理得：

$v^2m_1=x^2-vx$，代入求根公式得：

$$x=\frac{v\pm\sqrt{v^2+4v^2m_1}}{2\times 1}$$

$$=\frac{v\pm v\sqrt{1+4m_1}}{2}$$

令 $r_2^2=1+4m_1$

由此得知，若(12)式有解，则

$$\left.\begin{aligned} r_2^2&=1+4m_1\\ k^3&=1+3m_1\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

式必有解，因此只要讨论(15)式的解就行了。

由(15)式得：

$$\frac{r_2^2 - 1}{4} = \frac{k^3 - 1}{3}$$

$$\Rightarrow 4k^3 = 3r_2^2 - 1 \tag{16}$$

【(16)式和(14)式情形相同】

易知(16)式有一组解：$k = r_2 = 1$，但由于$k = r_2 = 1$得到$m_1 = 0$而且以$k = 1$代入(1)式得到要么$x = 0$，要么$y = 0$，这和$x > 0$，$y > 0$发生矛盾。

【注：若取$k^3 = 1 + 3m$，$v = 3n$同时代入(12)式演算结果也得到同样情况，读者不妨试演】

那么，在(16)式中，除了$k = r_2 = 1$以外，还有其他的解吗？继续讨论如下：

由第一章的引理，(16)式有：

$$k^3 = 1 + 3t$$

$$r_2^2 = 1 + 4t$$

又 $k^3 = 1 + 3t \Rightarrow k^3 \equiv 1 (mod 3) \Rightarrow k \equiv 1 (mod 3)$

$$\Rightarrow k = 1 + 3t_1$$

以$k = 1 + 3t_1$，代入(16)式：

$4(1 + 3t_1)^3 = 3r_2^2 + 1$ 整理得：

$$12t_1(3t_1^2 + 3t_1 + 1) = r_2^2 - 1 \tag{17}$$

(17)式中，易知r_2是奇数，令$r_2 = 2r_3 + 1$，代入(17)式整理得：

$$3t_1(3t_1^2 + 3t_1 + 1) = r_3(r_3 + 1) \tag{18}$$

由(18)式易知，$3t_1$和$(3t_1^2 + 3t_1 + 1)$互素

r_3和$(r_3 + 1)$互素

同时得知r_3和$(r_3 + 1)$的比例比$3t_1$和$(3t_1^2 + 3t_1 + 1)$的比例小，故在(18)式中有$r_3 > 3t_1$，由此得知，(18)式中，如果有解，则只有$r_3 \mid 3t_1^2 + 3t_1 + 1$的情况，当$r_3 \mid 3t_1^2 + 3t_1 + 1$时，可令

$$r_3 a_1 = 3t_1^2 + 3t_1 + 1$$

即 $r_3 = \dfrac{3t_1^2 + 3t_1 + 1}{a_1}$ 将其代入(18)式整理得：

$$3t_1(a_1^2 \quad t_1 \quad 1) - 1 + a_1 \tag{19}$$

由(19)式得知 a_1 是形如 $3c \quad 1$ 的形式，以 $a_1 - 3c \quad 1$ 代入(19)式整理得：

$$t_1[(3c \quad 1)^2 \quad t_1 \quad 1] - c$$

$$\Rightarrow \quad t_1[3c(3c \quad 2) \quad t_1] \quad c \tag{20}$$

(20)式中，取 $c > 0, t_1 > 0$，且 t_1 是 c 的一个因数

$$\left.\begin{array}{l} \text{当 } c - 1 \text{ 时由(20)式计算得：} t_1(3 \quad t_1) \quad 1 \\ \text{当 } c - 2 \text{ 时，由(20)式计算得：} t_1(8 \times 3 \quad t_1) - 2 \\ \text{当 } c - 3 \text{ 时，由(20)式计算得：} t_1(21 \times 3 \quad t_1) - 3 \\ \text{当 } c \quad 4 \text{ 时，由(20)式计算得：} t_1(40 \times 3 \quad t_1) - 4 \\ \text{当 } c - 5 \text{ 时，由(20)式计算得：} t_1(65 \times 3 \quad t_1) \quad 5 \end{array}\right\} \tag{21}$$

…………

由(21)式得到提示，它们中，每行中括号内的数是随着 c 值而增大的，而且是递增的，但 t_1 的取值是 $t_1 \leqslant c$，t_1 越大，等号二端的差距越大，则(21)式无零外的正整数解，也就是(20)无解，由于(20)式无解，得到(18)式无解，这样逆推得到(6)式无解。

另一证法　上接(18)式可得，即：

$$(18) \Rightarrow 9t_1^3 + 9t_1^2 + 3t_1 - (r_3^2 + r_3) \quad 0 \tag{22}$$

利用代数三次方程求根公式，

设 $t_1 - t_2 \quad \frac{b}{3a} \Rightarrow t_1 \quad t_2 \quad \frac{9}{3 \times 9} \Rightarrow t_1 - t_2 - \frac{1}{3}$，并将其代入(22)整理得：

$$9t_2^3 \quad \frac{1}{3} \quad (r_3^2 + r_3) - 0 \tag{23}$$

将(23)式的二边乘以 3 得：

$$27t_2^3 - 1 - 3(r_3^2 + r_3) \quad 0 \tag{24}$$

显然，根据第一章第二节引理，在(24)式中，由于(27,3) − 3，而 3∤1，所以知(24)式无整数解，从而证明(6)式也没有正整数解。

第四节　讨论 $x^n = y^3 - z^3$ 的整数解

本节方程解的表示式，只须将本章第一、第二节讨论题解的表示式中的(+)号改为(−)号就成了。其中 a 和 b 是任意整数，而 $a \neq b$。

第五节　本章总结

本章讨论结果是：

(一) $x^{3k+1} = y^3 \pm z^3$ 的解的表示式是：

$$x = a^3 \pm b^3, y = a(a^3 \pm b^3)^k, z = b(a^3 \pm b^3)^k$$

(二) $x^{3k+2} = y^3 \pm z^3$ 的解的表示式是：

$$x = (a^3 \pm b^3)^2, y = a(a^3 \pm b^3)^{1+2k}, z = b(a^3 \pm b^3)^{1+2k}。$$

以上 a 和 b 都是任意整数，若括号内是“−”号时，则 $a \neq b$。

(三) $x^{3k} = y^3 + z^3$ 无解。

附：本章各题的解，也同样可用第六章第二节讨论的解法。举例如下：

求 $x^2 = y^3 - z^3$ 的正整数解

解：用第六章第二节的解法，即“解法一”

$$x^2 = y^3 - z^3 = (y - z)(y^2 + zy + z^2)$$

令：　　$x = kv$

$y - z = b$，得到 $y = z + b$，

$$(y^2 + zy + z^2) = (y - z)^2 + 3zy = b^2 + 3zy = a$$

即 $(kv)^2 = ba = b(b^2 + 3zy)$

整理得：$\frac{(kv)^2 - b^3}{3b} = zy = z(z + b)$　　(a)

∵b 是 $(kv)^2$ 的一个因数，且 $b < a, b < kv$，

∴$b = v, v^2$，

以 $b = v$ 代入(a)式可得：

$$\frac{v(k^2-v)}{3}=z(z+v) \qquad ①$$

以 $b=v^2$ 代入(a) 式可得：

$$\frac{k^2-v^4}{3}=z(z+v^2) \qquad ②$$

其中 k 和 z 要适当取值。

用本章第五节结论(二) 得到本题解的表示式为：即“解法二”

$$\left.\begin{aligned} x&=(a^3-b^3)^2\\ y&=a(a^3-b^3)\\ z&=b(a^3-b^3)\end{aligned}\right\} \quad (b)$$

若取 $a=2, b=1$ 代入(b) 式可得：

$$A\begin{cases} x=7^2\\ y=14\\ z=7\end{cases}$$

若取 $a=3, b=2$ 代入(b) 式可得：

$$B\begin{cases} x=19^2\\ y=57\\ z=38\end{cases}$$

若取 $a=4, b=2$ 代入(b) 式可得：

$$c\begin{cases} x=56^2\\ y=224\\ z=112\end{cases}$$

【注：c 式中由第六章第二节《引理 A》若把 x 除以 M^3，y 和 z 除以 M^2，并取 $M=4$，则可得到如同 A 的表示式。】

现在我们验证一下：

在“解法一”①的表示式中，当取 $v=k=7$ 时，可得到同“解法二”的 A 的解，当取 $v=k=19$ 时，可得到同 B 的解，当取 $k=28$，$v=112$ 时，可得到同 c 的解。又再在“解法一”②的表示式中，当取 $k=14$，$v=2$ 得到一组解为：$x=28$，$y=10$，$z=6$，而在“解法

二”的(b)中,取$a=10$,$b=6$得到x,y,z的解,再由《引理A》把M^3-28^3去除x,把M^2-28^2去除y和z,得到的也同“解法一”②的解。由此可知第六章第二节讨论的解法和本章第五节的结论(二)是一致的,但前者选择k和z值的过程是比较困难的。

习题

用本章第五节的结论求出下列不定方程的解的表示式:

1. $x^5=y^3+z^3$
2. $x^{10}=y^3+z^3$

第九章　关于$x^n=y^4+z^4$的解的讨论

第一节　求$x^5=y^4+z^4$的整数解

求　$x^5=y^4+z^4$ (1)

的解

解:　由第八章第一节的结论,可得到(1)式的解是:

$$x=a^4+b^4,\quad y=a(a^4+b^4),\quad z=b(a^4+b^4)。$$

第二节　求$x^3=y^4+z^4$的整数解

求　$x^3=y^4+z^4$ (2)

的解。

解:　由第八章第一节的结论,并将(2)式左端增大为$x^{2\times4+1}$,即:

$$x^9=y^4+z^4 \quad (3)$$

同上理,(3)式的解为:

$$x=a^4+b^4,\quad y=a(a^4+b^4)^2,\quad z=b(a^4+b^4)^2.$$

将(3)式改写成$(x^3)^2 = y^4 + z^4$,从而容易得到(2)式解的表示式是只将(3)式x的表示式改写成$x = (a^4 + b^4)^3$,就得到(2)式解的表示式是:

$$x = (a^4 + b^4)^3, y = a(a^4 + b^4)^2, z = b(a^4 + b^4)^2。$$

第三节　试证 $x^2 = y^4 + z^4$　无正整数解

试证　$x^2 = y^4 + z^4$　(4)

无正整数解

证:　假设(4)式有正整数解,则必有一组解x_1是最小正整数而满足(4)式,

即 $x_1^2 = y^4 + z^4$　(5)

将(5)式改写成

$$x_1^2 = (y^2)^2 + (z^2)^2 \quad (6)$$

由(6)式和勾股定理,我们有:

$$x_1 = a^2 + b^2,\quad y^2 = a^2 - b^2,\quad z^2 = 2ab \quad (7)$$

由勾股定理得知$a > b, (a,b) = 1,\ 2 \nmid a + b$,

因为$2 \nmid a + b$,故知a和b是一奇一偶,假设$b = 2b_1$

则由(7)式有 $z^2 = 4ab_1 \Rightarrow (\frac{z}{2})^2 = ab_1$　(8)

因为$(a,b) = 1$,得到$(a,b_1) = 1$,由(8)式和$(a,b_1) = 1$,

得知a和b_1本身等于一个平方数,故令:

$a = k^2, b_1 = v^2$,并且$(k^2, v^2) = 1$　(9)

由(9)和(7)式有:

$$y^2 = a^2 - b^2 = (k^2)^2 - (2v^2)^2 \quad (10)$$

由(10)式和勾股定理,我们有:

$$2v^2 = 2cd, y = c^2 - d^2, k^2 = c^2 + d^2 \quad (11)$$

由(11)式$2v^2 = 2cd \Rightarrow v^2 = cd$,又因$(c,d) = 1$,故知$c$和$d$本身也

是一个平方数，即：

$$c = i^2, d = j^2 \tag{12}$$

以上 c、d、i、j 都是正整数。

以(12)式代入(11)式得：

$$k^2 = (i^2)^2 + (j^2)^2 \tag{13}$$

由(7)式得到 $x_1 > a$，又由(9)式的 $a = k^2$ 得到 $a^2 \geqslant k^2$，故 $x_1^2 > k^2$，由(13)有 $k^2 = i^4 + j^4 > 0$，现在将(13)式和(5)式对照，得到 $x_1^2 = y^4 + z^4 > k^2 = i^4 + j^4$，这和假设 x_1 是一个满足(4)式的最小正整数发生矛盾，故(4)式没有正整数解。显然，由于 $x^2 = y^4 + z^4$ 无解，从而 $x^4 = y^4 + z^4$ 也无解，不然的话，就和 $(x^2)^2 = y^4 + z^4$ 无解的结论发生矛盾。

第四节　本章结论

本章讨论的结果是：

(一) $x^{4k+1} = y^4 \pm z^4$ 的解的表示式是：

$$x = a^4 \pm b^4, y = a(a^4 \pm b^4)^k, z = b(a^4 \pm b^4)^k$$

(二) $x^{4k+3} = y^4 \pm z^4$ 的解的表示式是：

$$x = (a^4 \pm b^4)^3, y = a(a^4 \pm b^4)^{2+3k}, z = b(a^4 \pm b^4)^{2+3k}$$

(三) $x^{2k} = y^4 \pm z^4$ 无解。

以上 a、b 都是整数，若括号内是“　”号时，则 $a \neq b$，

习题

求出下列不定方程的解的表示式

1. $x^{13} = y^4 + z^4$

2. $x^7 = y^4 - z^4$

第十章　讨论 $x^n = y^5 \pm z^5$ 的整数解

第一节　试证 $x^5 = y^5 + z^5$ 无正整数解

试证 $x^5 = y^5 + z^5$ (1)

式无正整数解

证：仿第八章第三节的方法得到：

(1)⇒ $\frac{z^4(k^5 - 1)}{5} = T(v^2 + T)$ (2)

其中：$z = kv$

$y - x = v$

$xy = T$

(2)式有三种情况，要么是 $5|v^4$，要么是 $5|k^5 - 1$，要么是二者兼有，但都和第八章第三节一样、三种情况的结果都相同，现只须讨论其中一种就可以了，讨论第一种情况，即 $5|v^4$

令 $5m = v^4 \Rightarrow 5n = v$ 将其代入(2)整理

得到 $125n^4(k^5 - 1) = T^2 + 25n^2T$ (3)

代入求根公式

$$T = \frac{-25n^2 \pm \sqrt{625n^4 + 4 \times 125n^4(k^5 - 1)}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-25n^2 \pm 5n^2\sqrt{5[5 + 4(k^5 - 1)]}}{2}$$

令 $r^2 = 5[5 + 4(k^5 - 1)]$

设 $5r_1 = r$　得：$5r_1^2 = 5 + 4(k^5 - 1)$

$\Rightarrow 5r_1^2 - 4k^5 = 5 - 4 = 1$ (4)

易知(4)式有一组解为 $r_1 = k = 1$，这也和第八章第三节的道理由(2)式得到 $T = 0$ 或 $v^2 + T = 0$，这和 $T > 0$ 和 $v > 0$ 发生矛盾。

那么(4)式中还有没有 $r_1>1, k>1$ 的整数解呢?由第一章引理(4)式有

$$r_1^2 = 1 + 4t$$

$$k^5 = 1 + 5t \qquad t \text{ 是正整数}$$

又由 $k^5 = 1 + 5t \Rightarrow k^5 \equiv 1 (mod 5) \Rightarrow k \equiv 1 (mod 5)$

$\Rightarrow k = 1 + 5t_1$ 代入(4)式:

$5r_1^2 = 4(1 + 5t_1)^5 - 1$ 整理移项得:

$$r_1^2 = 1 + 20t_1(125t_1^4 + 125t_1^3 + 50t_1^2 + 10t_1 + 1) \qquad (5)$$

易知(5)式中 r_1 是奇数,令 $r_1 = 2r_2 + 1$ 代入(5)式

得:$r_2(r_2 + 1) = 5t_1(125t_1^4 + 125t_1^3 + 50t_1^2 + 10t_1 + 1) \qquad (6)$

因为:$(r_2, (r_2 + 1)) = 1$

$$(5t_1, (125t_1^4 + 125t_1^3 + 50t_1^2 + 10t_1 + 1)) = 1$$

所以唯有 $r_2 \mid 125t_1^4 + 125t_1^3 + 50t_1^2 + 10t_1 + 1$

令 $r_2 a = 125t_1^4 + 125t_1^3 + 50t_1^2 + 10t_1 + 1$

即 $r_2 = \dfrac{125t_1^4 + 125t_1^3 + 50t_1^2 + 10t_1 + 1}{a}$

将其代入(6)整理得:

$$5t_1(a^2 - 25t_1^3 - 25t_1^2 - 10t_1 - 2) = 1 + a \qquad (7)$$

(7)式中易知 a 等于形如 $5c - 1$ 的形式

以 $a = 5c - 1$ 代入(7)整理得:

$$t_1[5c(5c - 2) - 5t_1(5t_1^2 + 5t_1 + 2) - 1] = c \qquad (8)$$

(8)式中取 $c > 0, t_1 > 0$,且 t_1 是 c 的因数

当 $c = 1$ 时,由(8)式计算得:

$t_1[5 \times 3 - 5t_1(5t_1^2 + 5t_1 + 2) - 1] = 1$

当 $c = 2$ 时,由(8)式计算得:

$t_1[5 \times 16 - 5t_1(5t_1^2 + 5t_1 + 2) - 1] = 2$

当 $c = 3$ 时,由(8)式计算得:

$t_1[5 \times 39 - 5t_1(5t_1^2 + 5t_1 + 2) - 1] = 3$

当 $c = 4$ 时，由(8)式计算得：

$t_1[5\times 72 - 5t_1(5t_1^2 + 5t_1 + 2) \quad 1] \quad 4$

当 $c = 5$ 时，由(8)式计算得：

$t_1[5\times 115 \quad 5t_1(5t_1^2 + 5t_1 + 2) \cdot 1] - 5$

当 $c = 6$ 时，由(8)式计算得：

$t_1[5\times 168 - 5t_1(5t_1^2 + 5t_1 + 2) \quad 1] - 6$

……………………………………………

由以上计算得到提示，不论是那一列，t_1 值越大列式等号二端绝对值差距越大，也就是恒不相等，例如第六列当 $c = 6$ 时，由于 $6 = 1\times 6 = 2\times 3$，故这时 t_1 的取值范围是 1，2，3，6。

当 $t_1 = 1$ 时，计算这列的左端得到 779

当 $t_1 = 2$ 时，计算这列的左端得到 1038

当 $t_1 = 3$ 时，计算这列的左端得到 573

当 $t_1 = 6$ 时，计算这列的左端得到 − 33126

由此得知(8)式等号二端的绝对值左端恒大于右端，由此逆推得知(1)式无解。

第八章第三节、第九章第二节和本章这一节所讨论的不定方程，就是著名的费马大定理，本书不拟做进一步的探讨。但为了帮助读者了解一些有关情况，即在

$x^p = y^p + z^p$ 【p 是奇素数】

中用第八章第三节的方法【通过杨辉三角计算(见第七章第三节)】可以得到以下情况：

即：$x^3 = y^3 + z^3 \Rightarrow \dfrac{v^2(k^3 \quad 1)}{3T} = 1$

$x^5 = y^5 + z^5 \Rightarrow \dfrac{v^4(k^5 - 1)}{5T} = (v^2 + T)$

$x^7 = y^7 + z^7 \Rightarrow \dfrac{v^6(k^7 - 1)}{7T} = (v^2 + T)^2$

$x^9 = y^9 + z^9 \Rightarrow \dfrac{v^8(k^9 - 1)}{3T} = 3(v^2 + T)^3 + (v^2T^2)$

【注“9”是 3^2 的数，不是素数，仅列出参考，下面不是素数的，就不再列出来】

$$x^{11}=y^{11}+z^{11}\Rightarrow \frac{v^{10}(k^{11}-1)}{11T}=(v^2+T)^4+(v^2+T)(v^2T^2)$$

$$x^{13}=y^{13}+z^{13}\Rightarrow \frac{v^{12}(k^{13}-1)}{13T}=(v^2+T)^5+2(v^2+T)^2(v^2T^2)$$

$$x^{17}=y^{17}+z^{17}\Rightarrow \frac{v^{16}(k^{17}-1)}{17T}=(v^2+T)^7+5(v^2+T)^4(v^2T^2)+(v^2+T)(v^2T^2)^2$$

$$x^{19}=y^{19}+z^{19}\Rightarrow \frac{v^{18}(k^{19}-1)}{19T}=(v^2+T)^8+7(v^2+T)^5(v^2T^2)+3(v^2+T)^2(v^2T^2)^2$$

$$x^{23}=y^{23}+z^{23}\Rightarrow \frac{v^{22}(k^{23}-1)}{23T}=(v^2+T)^{10}+12(v^2+T)^7(v^2T^2)+14(v^2+T)^4(v^2T^2)^2+(v^2+T)(v^2T^2)^3$$

……………

其中：$z=vk, xy=T, y=x-v$（即 $x-y=v$）

由以上的演算，可以推导出：

$$x^p=y^p+z^p\Rightarrow \frac{v^{p-1}(k^p-1)}{pT}=(v^2+T)^{\frac{p-3}{2}}+a_1(v^2+T)^{\frac{p-3}{2}-3}(v^2T^2)+a_2(v^2+T)^{\frac{p-3}{2}-3\times 2}(v^2T^2)^2+\cdots+a_i(v^2+T)^{\frac{p-3}{2}-3i}(v^2T^2)^i$$

其中：$\frac{p-3}{2}-3i>0, i=1,2,3,\cdots\cdots$

至于式中的 a_i 之值的规律，有待于进一步的探讨。

如果证明了以上各式 k、T、v 的正整数解中不能逆算出 x、y、z 的正整数解时，就是证明了当 n 等于这个素数 p 时，费马大定理成立。当然，如果这些式中，k、V、T 没有正整数解，也就是证明 x、y、z 没有正整数解了。

我们知道，按照阿贝耳定理，代数方程根的表达式，只有二至四次方程根的表达式，即五次以及更高次的代数方程没有一般的

根式解，所以当 $p \geqslant 7$ 时，就不能用第八章第二节的方法去证明。事实上，素数有无限多个，用这样的方法即使可以证明也只有限个，这正证实了大数学家们所训诫的，费马大定理是世界著名数学难题，它不可能用初等数论的方法【包括如第八章第二节的方法】所能解决的，希望数学爱好者不要走入歧途，徒劳无益浪费精力。作者写到这里非常惊喜地获知英国数学家美国普林斯顿大学教授威尔斯最近已向世界数学界公布，他已攻克了这一困惑世界数学家们三百余年的数学难题【费马大定理】，这也是证明了人类的智慧是无穷的，事物的发展总是随着时代的车轮滚滚向前，科学是永无止境的。

第二节　本章结论

由本章第一节和第八章第五节的结论可得：

一、$x^{5k+1} = y^5 \pm z^5$ 的解的表示式为：

$x = a^5 \pm b^5$，　$y = a(a^5 \pm b^5)^k$，　$z = b(a^5 \pm b^5)^k$，

二、$x^{5k+2} = y^5 \pm z^5$ 的解的表示式为：

$x = (a^5 \pm b^5)^3, y = a(a^5 \pm b^5)^{1+3k}, z = b(a^5 \pm b^5)^{1+3k}$

三、$x^{5k+3} = y^5 \pm z^5$ 的解的表示式为：

$x = (a^5 \pm b^5)^2, y = a(a^5 \pm b^5)^{1+2k}, z = b(a^5 \pm b^5)^{1+2k}$

四、$x^{5k+4} = y^5 \pm z^5$ 的解的表示式为：

$x = (a^5 \pm b^5)^4, y = a(a^5 \pm b^5)^{3+4k}, z = b(a^5 \pm b^5)^{3+4k}$

五、$x^{5k} = y^5 \pm z^5$ 无解

以上 a 和 b 都是整数，若括号内是“　”号时，则 $a \neq b$。

第十一章　求 $x^n = y^m \pm z^m$ 解的表示式的方法

从第八、九、十章的讨论得知，凡在形如

$$x^n = y^m + z^m$$

式中，若 $(n,m)=1$，则方程必有解，且知必有二个正整数 v,c 使得

$mv+1=nc$ 成立，并得到方程的解的表示式为：

$$x=(a^m \pm b^m)^c$$

$$y=a(a^m \pm b^m)^v$$

$$z=b(a^m \pm b^m)^v$$

举例如下：

例一：　求 $x^7=y^{11}+z^{11}$ 的解的表示式。

由本章引理和本题有：

$$mv+1=nc \Rightarrow 11v+1=7c$$

得到 $c=8+11t$，$v=5+7t$，t 是正整数。

故例一的解的表示式为：

$$x=(a^{11}+b^{11})^{8+11t}$$

$$y=a(a^{11}+b^{11})^{5+7t}$$

$$z=b(a^{11}+b^{11})^{5+7t}$$

例二：　求 $x^{17}=y^7+z^7$ 解的表示式

由本章引理和本题有：

$$mv+1=nc \Rightarrow 7v+1=17c$$

解得：$c=5+7t$，$v=12+17t$，

故例二的解的表示式为：

$$x=(a^7+b^7)^{5+7t}$$

$$y=a(a^7+b^7)^{12+17t}$$

$$z = b(a^7 + b^7)^{12+17t}$$

以上 a 和 b 都是任意整数，但 $a + b \neq 0$。

习题

一、判断下列不定方程有否非零整数解：

(1) $x^{20} = y^5 + z^5$

(2) $x^6 = y^{14} + z^{14}$

(3) $x^{11} = y^3 + z^3$

二、求下列不定方程的非零整数解：

(1) $x^{24} = y^5 + z^5$

(2) $x^5 = y^6 + z^6$

三、用以上各章的结论，证明 $x^6 = y^4 + z^4$ 无解。

四、用第七章第四节解的表示式求 $x^2 = y^3 + z^4$ 的正整数解。（本题用第十二章的引理求解较易，这里要求用第七章第四节的解法，目的是让学者加深理解和巩固前一段的演算方法）

第十二章　试证明 $x^n = y^m + z^m, n \neq m, m > 2$ 式有解的充要条件是 $(m,n) = 1$

证：　用反证法：在 $x^n = y^m + z^m, n \neq m, m > 2$ 式中，若 $(n,m) = d > 1$，则有 $m = a'd, n = b'd$，a' 和 b' 是整数；这时 $d \nmid (vm + 1)$，不然的话，$d \mid (vm + 1) \Rightarrow dc$【$c$ 是整数】$= (vm + 1) \Rightarrow dc = va'd + 1 \Rightarrow d(c - va') = 1$，这是不可能的，故 $d \nmid vm + 1$。

由于 $d \nmid vm + 1$，得到 $b'd \nmid (vm + 1) \Rightarrow n \nmid (vm + 1)$，由于 $n \nmid (vm + 1)$，得到 $nw \nmid (vm + 1)$，这和第十一章（一）有二个正整数 v, u 能满足 $vm + 1 = nw$ 式发生矛盾，故当 $(m,n) = d > 1$ 时，方程 $x^n = y^m + z^m, n \neq m, m > 2$ 无解。这个证明和著名的费马大定理是一致的。

第十三章 关于形如 $x^n = y^m \pm z^k$ 式解的讨论

$$x^n = y^m \pm z^k \quad 其中 n、m、k 都是正整数 \qquad (C)$$

【本章讨论过程中，所列举的方程，书中只说："例如…方程有解，但……方程无解"。都将解法省去，留给读者演习，另外所举例题，都有一题多解，但只选解其一，也留给读者演习】。

综合以上各章的结论，得到 (C) 式有否整数解的一般结果如下：

（一） (C) 式中的三个指数，如果是不同的素数，【包括素数的多次方数】则方程必有解。

因为 $\{m,k\} = w$【最小公倍数】由第十一章引理得知，有二个正整数 v 和 c 能满足

$wv + 1 = nc$ 成立并得到 (C) 式解的表示式为：

$$x = (a^m \pm b^k)^c M^{\frac{\{n,m,k\}}{n}}$$

$$y = a(a^m \pm b^k)^{\frac{wv}{m}} M^{\frac{\{n,m,k\}}{m}}$$

$$z = b(a^m \pm b^k)^{\frac{wv}{k}} M^{\frac{\{n,m,k\}}{k}}$$

其中：a、b、M 是零以外的整数，且 $a^m \pm b^k \neq 0$。

（二）当 $(n,m,k) = 1$ 时

(1) 如果 n、m、k 三个都是奇数，这时，只要能满足（一）中的公式，方程就有解，例如：$x^5 = y^7 + z^9$，$x^3 = y^{25} + z^5$，$x^7 = y^{15} + z^{45}$，…都有解，但 $x^{21} = y^3 + z^7$，$x^{21} = y^{15} + z^{25}$，…都无解。

(2) 如果 n、m、k 中有二偶一奇，除了符合（一）中的公式，例如 $x^{21} = y^4 + z^{10}$，$x^{11} = y^6 + z^{15}$，…有解外，还有一特例 $x^3 = y^2 \quad z^6$ 有解，【见本章例二】但 $x^3 = y^2 + z^6$ 无解。

由于（一）中的公式和 $x^3 = y^2 \quad z^6$ 有解，从而推知当方程为：

$x^{n(奇数)} = y^2 \quad z^6$ 都有解

但在 $x^{3n'} = y^{2m'} + z^{6k'}$ 式中，

唯有$(n',m')=(n',k')=(m',k')=1$时，方程才有解。

【证明情况，见以下例六】

又由于 $x^3 = y^2 + z^6$ 无解，从而推知，当方程为

$x^{3(奇数)} = y^{2m'} + z^{6k'}$ 时也无解

又因为 $x^5 = y^4 + z^{10}$, $x^5 = y^6 + z^{10}$ 都无解，从而推知，当方程为：

$x^{n(奇数)} = y^{2m'} + z^{2k'}$，只有

$(n,m')=(n,k')=1$ 时，方程才有解。

(3) 如果 n、m、k 中有二奇一偶，而二个奇数互素，若有一个和偶数互素，则方程就有解，若二个奇数不互素，则偶数都不含有这二个奇数的素因数时，方程才有解，例如 $x^4 = y^3 + z^7$, $x^6 = y^9 + z^{35}$, $x^{14} = y^{15} + z^9$, … 都有解，但 $x^{30} = y^5 + z^3$, $x^{42} = y^{15} + z^{25}$, … 都无解。

(三) 当$(n,m,k)=2$时，

(1) 如果(C)式符合移项写成形如

$$x^n = y^2 + (z^{k'})^2$$

这时，若$(n,k')=1$，则(C)式有解，若$(n,k')=2$，则只有有限解，例如 $x^6 = y^2 + (z^4)^2$, $x^8 = y^2 + (z^3)^2$, $x^6 = y^2 + (z^2)^2$, … 等都有解，但 $x^8 = y^2 + (z^2)^2$ 无解。【已在第九章讨论】

(2) 如果(C)式写成形如

$(x^{n'})^2 = (y^{m'})^2 + (z^{k'})^2$

这时，(C)式有解的首先必要条件是 n'、m'、k' 是不同的素数，或二个奇素数和一个与奇素数二二都互素的偶数，例如 $(x^2)^2 = (y^3)^2 + (z^5)^2$, $(x^2)^2 = (y^3)^2 + (z^7)^2$… 都有解，但 $(x^4)^2 = (y)^2 + (z^6)^2$, $(x^7)^2 = (y^3)^2 + (z^6)^2$… 都无解。

(四) 当 $n=2$, $m=3$，(C)式右边中间符号是"+"号时，则无论 k 是什么正整数，(C)式都有解。

(五) $(n,m,k) > 2$ 时，(C) 式无解。

举列如下：

例一： 求 $x^7 = y^5 + z^3$ 的解

解：由本章(一)的引理，上式有 $\{5,3\} = w = 15$

$15v + 1 = 7c$，解得 $v = 6, c = 13$，

得到解的表示式为：

$$x = (a^5 + b^3)^{13}$$

$$y = a(a^5 + b^3)^{\frac{vw}{5} = 18}$$

$$z = b(a^5 + b^3)^{\frac{vw}{3} = 30}$$

由第六章第二节《引理 A》【以下简称引理 A】得到本例题的解的表示式为：

$$\begin{cases} x = (a^5 + b^3)^{13} M^{15} \\ y = a(a^5 + b^3)^{18} M^{21} \\ z = b(a^5 + b^3)^{30} M^{35} \end{cases}$$

其中 a、b 和 M 都是零以外的整数，$a^5 + b^3 \neq 0$

例二 求 $x^4 = y^6 + z^{14}$ 的解

解： 将原式移项改写成：

$(z^2)^7 = x^4 - y^6$

上式有 $\{4,6\} = w = 12$

$12v + 1 = 7c$ 解得 $v = 4, c = 7$，

得到解的表示式为：

$$\begin{cases} z^2 = (a^4 - b^6)^7 \\ x = a(a^4 - b^6)^{\frac{vw}{4} = 12} \\ y = b(a^4 - b^6)^{\frac{vw}{6} = 8} \end{cases}$$

在 $z^2 = (a^4 - b^6)^7$ 式中

令 $z_1^2 = a^4 - b^6$

则 $(z_1^2)^7 = z^2$，得到 $z = z_1^7$

先解 $z^2 = a^4 - b^6$

移项为：$b^6 = (a^2)^2 - z_1^2$

由第七章第四节公式，上式有：

$$b = a_1^2 - b_1^2$$

$$a^2 = (a_1^2 + b_1^2)(a_1^2 - b_1^2)^2$$

$$z_1 = 2a_1b_1(a_1^2 - b_1^2)^2$$

由《引理 A》以 M^3 去乘 a^2 和 z_1 的值，以 M 去乘 b 的值，

先在 $a^2 = (a_1^2 + b_1^2)(a_1^2 - b_1^2)^2M^3$ 式中用配方方法求出 M 值，即：$a^2 = (a_1^2 + b_1^2)(a_1^2 - b_1^2)^2\{a_1^2 + b_1^2\}^3$

$= (a_1^2 + b_1^2)^4(a_1^2 - b_1^2)^2$

∴ 得到，当 $M = (a_1^2 + b_1^2)$ 时，

同上理可得：

$$①\begin{cases} a = (a_1^2 + b_1^2)^2(a_1^2 - b_1^2) = (a_1^2 + b_1^2)(a_1^4 - b_1^4)M_1^3 \\ b = (a_1^2 - b_1^2)(a_1^2 + b_1^2) = (a_1^4 - b_1^4)M_1^2 \\ z_1 = 2a_1b_1(a_1^2 - b_1^2)^2(a_1^2 + b_1^2)^3 = 2a_1b_1(a_1^2 + b_1^2)(a_1^4 - b_1^4)^2M_1^6 \end{cases}$$

最后如同例一的道理得到本题解的表示式为：

$$②\begin{cases} x = a(a^4 - b^6)^{12}M_2^{21} \\ y = b(a^4 - b^6)^8M_2^{14} \\ z = z_1^7M_2^6 \end{cases}$$

以上②中的 a、b 和 z_1 由①中给出，①中的 a_1 和 b_1 以及 M_1M_2 都是零以外的整数，而 $a_1 \neq b_1$。

例二： 求 $x^2 = y^3 + z^6$ 的解

解 将原式改写成：

$$x^2 = y^3 + (z^2)^3$$

由第八章第二节公式得到上式解的表示式为：

$$x = (a^3 - b^3)^2$$

$$y = a(a^3 + b^3)$$

$$z^2 = b(a^3 + b^3)$$

由《引理 A》以 M^3 去乘 x 值，以 M^2 去乘 z^2 和 y 值。显然，这时如果用例二的方法，在

$$z^2 = b(a^3 + b^3)M^2$$

式中用配方方法直接求出 M 是不可能的，因为 z^2 和 M^2 同是平方数，而 $b(a^3 + b^3)$ 也不能直接进行开方。但它却很容易得到

当 $a = 2$，$b = 1$ 时

可得到：$z^2 = (2^3 + 1) = 9$，得到 $z = 3$，

于是得到

$$x = (a^3 + b^3)^2 = 81$$

$$y = a(a^3 + b^3) = 18$$

$$z = 3$$

由《引理 A》以 M^3 去除 x 值，以 M^2 去除 y 值，以 M 去除 z 值，由观察易得 $M = 3$，然后仍由《引理 A》可得到例三解的表示式为：

$$x = 3M_1^3$$

$$y = 2M_1^2$$

$$z = M_1$$

其中 M_1 是零以外的任意整数

由于 $z = 1$，而 1 也是个整数的多次方数，故在本章(C)式中若 $n = 2$，$m = 3$ 时，则 k 可以是任意正整数，但当 k 是奇数时，则 M_1 只限于正整数。

例四： 求 $x^2 = y^4 + z^6$ 的解

解： 将原式移项并改写成：

$$z^6 = x^2 - (y^2)^2$$

由第七章第四节公式和上式，有

$$z = a^2 - b^2$$

$$x = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2)^2$$

$$y^2 = 2ab(a^2 - b^2)^2$$

这时仿例二的方法，在

$y^2 = 2ab(a^2 - b^2)^2M^3$ 式中可得到

$M = 2ab$

最后得到本题解的表示式为：

$x = (2ab)^3(a^2 - b^2)(a^4 - b^4)M_1^4$

$y = (2ab)^2(a^2 - b^2)M_1^3$

$z = 2ab(a^2 - b^2)M_1^2$

其中 a、b 和 M_1 是零以外的整数而 $a \neq b$.

例五： 求 $x^6 = y^2 + z^{10}$ 的解

解： 将原式改写成：

$x^6 = y^2 + (z^5)^2$

由第七章第二节公式和上式，有：

$x = a^2 + b^2$

$y = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)^2$

$z^5 = 2ab(a^2 + b^2)^2$

仿前例，在 $z^5 = 2ab(a^2 + b^2)^2M^5$ 式中，

得到 $M = (2ab)^3(a^2 + b^2)$

最后得到本题解的表示式为：

$x = (2ab)^3(a^2 + b^2)M^5$

$y = (2ab)^9(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)^5M^{15}$

$z = (2ab)^2(a^2 + b^2)M^3$

其中 a、b、M 是零以外整数，而 $a \neq b$

例五也可将其移项改写成.

(z^2) [illegible]

[illegible]本章引理([illegible] 和上式，有：6，2 [illegible] w [illegible] 6

[illegible] 解得 [illegible]

得到解的表示式为：

[illegible]

$x = a(a^6 - b^2)^4$

$y = b(a^6 - b^2)^{\cdot 4}$

仿例 的方法在

$z^2 = (a^6 - b^2)^5$ 式中

令 $z_1^2 = a^6 - b^2$

则$(z_1^2)^5 = z^2$　得到 $z = z_1^5$

将 $z_1^2 = a^6 - b^2$

移项 $a^6 = z_1^2 + b^2$

由第七章第三节公式和上式，有

$$③\begin{cases} a = (a_1^2 + b_1^2)M_1 \\ z_1 = 2a_1b_1(a_1^2 + b_1^2)M_1^3 \\ b = (a_1^2 - b_1^2)(a_1^2 + b_1^2)M_1^3 \end{cases}$$

故例五又有一组解的的表示式为：

$$④\begin{cases} x = a(a^6 - b^2)^4M_2^5 \\ y = b(a^6 - b^2)^{\cdot 2}M_2^{\cdot 3} \\ z = z_1^5M_2^3 \end{cases}$$

1 中的 a、b、z_1 由③ 中给出，③ 中的 a_1、b_1 以及 M、M，都是零以外整数，而 $a \neq b_1$。

例六： 试证明 x^{3n} y^{2m} z^{6k}

式中，若$(3n', 2m, 6k') = 1$ 时，则方程有解的充要条件

n', m $(n, k') = m, k'$

证明 因为我们已知

x y^2 z^6 的一组解为：

$x = 2M^3$

$y = 3M$　　【见例 】

$z = M$

故由(C)和 5 组解，我们有：

$$
⑥\begin{cases} x^{n} = 2M^{2} \\ y^{m} = 3M^{3} \\ z^{k} = M \end{cases}
$$

令 $M = 2^{a} \times 3^{b}$

先求出上式中的 a 和 b 值。

由 $M = 2^{a} \times 3^{b}$ 和⑥，我们可立以下方程组并转为同余式组：

$$
⑦\begin{cases} 2a+1 = n'c_{1} \\ 3a = m'c_{2} \\ a = k'c_{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+1 \equiv 0(\bmod n') \\ 3a \equiv 0(\bmod m') \\ a \equiv 0(\bmod k') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a \equiv -1(\bmod n') \\ a \equiv 0(\bmod m') \\ a \equiv 0(\bmod k') \end{cases}
$$

$$
⑧\begin{cases} 2b = n'd_{1} \\ 3b+1 = m'd_{2} \\ b = k'd_{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b \equiv 0(\bmod n') \\ 3b+1 \equiv 0(\bmod m') \\ b+1 \equiv 0(\bmod k') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b \equiv 0(\bmod n') \\ 3b \equiv -1(\bmod m') \\ b \equiv 0(\bmod k') \end{cases}
$$

这时，⑦⑧若有解，则(C)有解，否则无解。

再例证如下：

例如：求 $x^{9} = y^{10} - z^{12}$ 的解。

将原式改写成

$(x^{3})^{3} = (y^{5})^{2} - (z^{2})^{6}$

上式解得：

$$
\begin{cases} x^{3} = 2M^{2} \\ y^{5} = 3M^{3} \\ z^{2} = M \end{cases}
$$

令 $M = 2^{a} \times 3^{b}$

将 $n' = 3, m' = 5, k' = 2$ 代入⑦⑧同余式组：

$$
\begin{cases} 2a \equiv -1(\bmod 3) \Rightarrow a \equiv 1(\bmod 3) \\ a \equiv 0(\bmod 5) \\ a \equiv 0(\bmod 2) \end{cases}
$$

$$\begin{cases} b \equiv 0 \pmod 3 \\ 3b \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow b \equiv 3 \pmod 5 \\ b \equiv 0 \pmod 2 \end{cases}$$

由孙子定理可解得：$a \equiv 10 \pmod{30}$，$b \equiv 18 \pmod{30}$

故 $M = 2^{10+30t} \times 3^{18+30s}$ 代入本题解的表示式整理得：

$x^3 = 2M^2 \Rightarrow x = 2^7 \times 3^{12} M^{\frac{(9\cdot10\cdot12)}{9}=20}$

$y^5 = 3M^2 \Rightarrow y = 2^6 \times 3^{11} M^{\frac{(9\cdot10\cdot12)}{10}=[illegible]}$

$z^2 = M \Rightarrow z = 2^5 \times 3^9 M^{\frac{(9\cdot10\cdot12)}{12}=15}$　其中 M 是零以外的整数

试判断下列方程有否整数解

1. $x^{21} + y^{10} = z^{24}$

2. $x^{21} + y^8 = z^{36}$

3. $x^{15} + y^4 = z^{24}$

判断如下：

1. 改为 $(x^7)^3 + (y^5)^2 = (z^4)^6$

将其代入以上⑦⑧同余式组：

$$\begin{cases} 2a \equiv -1 \pmod 7 \Rightarrow a \equiv 3 \pmod 7 \\ a \equiv 0 \pmod 5 \\ a \equiv 0 \pmod 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b \equiv 0 \pmod 7 \\ 3b \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow b \equiv 3 \pmod 5 \\ b \equiv 0 \pmod 4 \end{cases}$$

因为：$(4,5) = 20$，$20a_1 \equiv 3 \pmod 7$

而 $(20,7) \mid 3$，有解，

$(4,7) = 28$，$28b_1 \equiv 3 \pmod 5$

而 $(28,5) \mid 3$，有解，

故知 1 题有解。

2. 改写成：$(x^7)^3 + (y^4)^2 = (z^6)^6$

将其代入以上⑦⑧同余式组：

$$\begin{cases} 2a \equiv 1(mod7) \Rightarrow a \equiv 3(mod7) \\ a \equiv 0(mod4) \\ a \equiv 0(mod6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b \equiv 0(mod7) \\ 3b \equiv 1(mod4) \Rightarrow b \equiv 1(mod4) \\ b \equiv 0(mod6) \end{cases}$$

由于$(4,6)=2 \nmid (1-0)$，或$(\{6,7\},4)=2\nmid 1$，故知2题无解。

3. 改写成：$(x^5)^3 - (y^2)^2 \quad (z^4)^6$

将其代入以上 ⑦⑧ 同余式组：

$$\begin{cases} 2a \equiv 1(mod5) \Rightarrow a \equiv 2(mod5) \\ a \equiv 0(mod2) \\ a \equiv 0(mod4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b \equiv 0(mod5) \\ 3b \equiv 1(mod2) \Rightarrow b \equiv \pm 1(mod2) \\ b \equiv 0(mod4) \end{cases}$$

由于$(2,4)=2\nmid(\pm 1-0)$，或$(\{4,5\},2)=2\nmid \pm 1$，故知第3题无解，

由以上的讨论和例证得到，(C) 式有解的充要条件是 ⑦⑧ 同余式组有解，而 ⑦⑧ 有解的条件是 n'、m'、k' 三数都两两互素，从而(C) 式有解的充要条件是 n'、m'、k' 三数都两两互素。

例七： 求 $x^3 - y^2 \quad z^4$ 的解　　　　(原式)

解： 由第十二章引理，上式解的表示式是：

即原式解的表示式：

$$\begin{cases} x - (a^2 \quad b^4)^3 M^4 \\ y = a(a^2 \quad b^4)^4 M^6 \\ z - b(a^2 \quad b^4)^2 M^3 \end{cases}$$

若将原式改写成 $x^3 - y^2 \quad (z^2)^2$

则由第七章第四节公式，上式有：

$$
⑨\begin{cases} x = a^2 - b^2 \\ y_1 = a(a^2 - b^2) \\ z_1^2 = b(a^2 - b^2) \end{cases}
$$

$$
⑩\begin{cases} x = a^2 - b^2 \\ y_2 = a(a^2 + 3b^2) \\ z_2^2 = b(3a^2 + b^2) \end{cases}
$$

这时 ⑨ 的一切解，可由原式解的表示式给出，例如在 ⑨ 中取 $a = 6, b = 2$，即得到 $x = 32, y = 192, z = 8$，在原式解的表示式中取 $a = 3, b = 1$，即得到 $x = 8^3M^4, y = 3 \times 8^4M^6, z = 8^2M^3$，再取 $M = 2$ 约简就得到如同(⑨)的结果；至于 ⑩ 的一切解，也可由原式解的表示式给出，但计算就比较复杂，比如 ⑩ 式中，首先要求出 $z_2^2 = b(3a^2 + b^2)$ 的解，这个式的解，可由第十一章习题四的解中的(二)解的 ⑲ 得到

$$
\begin{cases} z_2 = 3v_2^2k_2 \\ a = v_2k_1 \\ b = 3v_2 \end{cases}
$$

其中 $k_1 > 3$，而 k_1, v_2, k_2 由(表 1)给出，由表 1 若取 $k_1 = 6$，$v_2 = 39, k_2 = 1$，则得到 ⑲ 的解为：

$$
\begin{cases} z_2 = 3 \times 39^2 = 3^3 \times 13^2 \\ a = 6 \times 39 = 2 \times 3^2 \times 13 \\ b = 3 \times 39 = 3^2 \times 13 \end{cases}
$$

将上式代入 ⑩ 式得：

$$
\begin{cases} x = a^2 - b^2 = 3^5 \times 13^2 \overset{\text{由(引理 A)取 } M^4 = 3^4 \text{ 除之}}{=\!=\!=\!=\!=} 3 \times 13^2 \\ y_2 = a(a^2 + 3b^2) = 2 \times 7 \times 3^6 \times 13^3 \\ \overset{\text{由(引理 A)取 } M^6 = 3^6 \text{ 除之}}{=\!=\!=\!=\!=} 2 \times 7 \times 13^3 \\ z_2 = 3^3 \times 13^2 \overset{\text{由(引理 A)取 } M^3 = 3^3 \text{ 除之}}{=\!=\!=\!=\!=} 13^2 \end{cases}
$$

现在以$\begin{cases} a = 2 \times 7 \times 13^3 \\ b = 13^2 \end{cases}$ 代入原式解的表示式得

$$\begin{cases} x = (a^2 + b^4) = 3^9 \times 13^{18} \\ \xlongequal{\text{由《引理 }A\text{》取 }M^4 = (3^2 \times 13^4)^4\text{ 除之}} 3 \times 13^2 \\ y = a(a^2 + b^4)^4 = 2 \times 7 \times 3^{12} \times 13^{27} \\ \xlongequal{\text{由《引理 }A\text{》取 }M^6 = (3^2 \times 13^4)^6\text{ 除之}} 2 \times 7 \times 13^3 \\ z = b(a^2 + b^4)^2 = 3^6 \times 13^{14} \\ \xlongequal{\text{由《引理 }A\text{》取 }M^3 = (3^2 \times 13^4)^3\text{ 除之}} 13^2 \end{cases}$$

由上得知原式解的表示式和改写后的形式的解式 ⑨ 和 ⑩ 都是一致的，也就是说用《引理 *A*》进行运算后，可以得到相同的解。

例八： 求 $x^7 = y^6 + z^9$ 的解

解： 本题有二个解，

一解为，由原式和第十二章(一)的公式，经计算可得解的表示式为：

$$\begin{cases} x = (a^6 + b^9)^{13}M^{18} \\ y = a(a^6 + b^9)^{15}M^{21} \\ z = b(a^6 + b^9)^{10}M^{14} \end{cases}$$

二解为，将原式变形为：

$$x^7 = (y^2)^3 + (z^3)^3$$

由上式和第十二章(一)的公式，有

$$\begin{cases} x = (a^3 + b^3)M_1^3 \\ y^2 = a(a^3 + b^3)^2M_1^7 \\ z^3 = b(a^3 + b^3)^2M_1^7 \end{cases}$$

由第十二章例六的方法，我们令

$$M_1 = a^{a'}b^{b'}(a^3 + b^3)^{c'}$$

由 $M_1 = a^{a'}b^{b'}(a^3 + b^3)^{c'}$ 和以上解的表示式，我们可立以下方程组，并转为同余式组，然后求出 a'、b'、c' 之值。即

$$\begin{cases} 7a' + 1 = 2c_1 \Rightarrow a' \equiv 1(mod2) \\ 7a' + 1 = 3c_2 \Rightarrow a' \equiv 0(mod3) \end{cases} \quad \text{解得 } a' \equiv 3(mod6)$$

$$\begin{cases} 7b' = 2d_1 \Rightarrow b' \equiv 0(mod2) \\ 7b' + 1 = 3d_2 \Rightarrow b' \equiv 2(mod3) \end{cases} \quad \text{解得 } b' \equiv 2(mod6)$$

$$\begin{cases} 7c' + 2 = 2t_1 \Rightarrow c' \equiv 0(mod2) \\ 7c' + 2 = 3t_2 \Rightarrow c' \equiv 1(mod3) \end{cases} \quad \text{解得 } c' \equiv 4(mod6)$$

故得到 $M_1 = a^3b^2(a^3 + b^3)^4$。

将其代入以上解的表示式组并整理可得：

$$\begin{cases} x = a^9b^6(a^3 + b^3)^{13}M^{18} \\ y = a^{11}b^7(a^3 + b^3)^{15}M^{21} \\ z = a^7b^5(a^3 + b^3)^{10}M^{14} \end{cases}$$

其中：a、b、M 是零以外的整数，且 $a^3 + b^3 \neq 0$，

附：在 n,m,k 三数中，如果任意二数都是互素的话，如将原式移项变形，变形后由本章引理得到的解，仍是一致的，举例如下：

$x^2 = y^3 + z^5$ （原式） (1)

将原式变形为以下二式：

$z^5 = x^2 + y^3$ (2)

$y^3 = x^2 - z^5$ (3)

由本章引理，(1) 式的解有：

$$A\begin{cases} x = (a^3 + b^5)^8 \\ y = a(a^3 + b^5)^5 \\ z = b(a^3 + b^5)^3 \end{cases}$$

由本章引理，(2) 式的解有：

$$B\begin{cases} z = (a^2 + b^3)^5 \\ x = a(a^2 + b^3)^{12} \\ y = b(a^2 + b^3)^8 \end{cases}$$

由本章引理，(3) 式的解有：

$$C\begin{cases} y = (a^2 - b^5)^7 \\ x = a(a^2 - b^5)^{10} \\ z = b(a^2 - b^5)^4 \end{cases}$$

在 A 中，取 $a = 2, b = 1$，可得到：

$$A\begin{cases} x = (a^3 + b^5)^8 = 9^8 = 3^{16} \\ y = a(a^3 + b^5)^5 = 2 \times 9^5 = 2 \times 3^{10} \\ z = b(a^3 + b^5)^3 = 9^3 = 3^6 \end{cases}$$

在 B 中，取 $a = 3, b = 2$，可得到

$$B'\begin{cases} z = (a^2 - b^3)^5 = 1 \\ x = a(a^2 - b^3)^{12} = 3 \\ y = b(a^2 - b^3)^8 = 2 \end{cases}$$

因为 $\{2,3,5\} = w = 30$，由第六章第二节《引理 A》，以 $M^{\frac{30}{5}}$ 去乘 z 值，以 $M^{\frac{30}{2}}$ 去乘 x 值，以 $M^{\frac{30}{3}}$ 去乘 y 值，得到：

$$B''、\begin{cases} z = M^6 \\ x = 3M^{15} \\ y = 2M^{10} \end{cases}$$

在 C 式中，取 $a = 3, b = 1$，可得：

$$C'、\begin{cases} y = (a^2 - b^5)^7 = 8^7 = 2^{21} \\ x = a(a^2 - b^5)^{10} = 3 \times 8^{10} = 3 \times 2^{30} \\ z = b(a^2 - b^5)^4 = 8^4 = 2^{12} \end{cases}$$

这时，在 B'' 组中如取 $M = 3$ 可得：

$$B'''\begin{cases} z = 3^6 \\ x = 3 \times 3^{15} = 3^{16} \\ y = 2 \times 3^{10} \end{cases}$$

于是得到 B''' 和 A' 是相同的，

若在 B'' 组中，取 $M = 4$，可得：

$$B'''\begin{cases} z = 4^5 = 2^{10} \\ x = 3 \times 4^{15} = 3 \times 2^{20} \\ y = 2 \times 4^{10} = 2 \times 2^{20} = 2^{21} \end{cases}$$

于是得到 B''' 和 C' 是相同的

故知在 A、B、C 三组解中，任取一组就可以了。

习题

1. 用本章引理判别以下方程有否整数解：

   (1) $x^7 = y^{15} \pm z^6$

   (2) $x^{14} = y^5 \pm z^{12}$

2. 在不定方程 $x^n = y^4 \pm z^6$ 式中，n 是什么数时方程才有整数解？并分别求出解的表示式。

第一部　习题解答

第一章

1. 解：(1) 把 38 和 24 用辗转相除横式求出最后一个余数【余数是 0 以外的正整数】，就是这二数的最大公约数，即：

$$38 \text{——} 24 \xrightarrow{1} 14$$

$$24 \text{——} 14 \xrightarrow{1} 10$$

$$14 \text{——} 10 \xrightarrow{1} 4$$

$$10 \text{——} 4 \xrightarrow{2} 2$$

得到 $(38,24)=2$，因为 $2\nmid 13$，则 13 不为 2 所整除，所以原方程没有整数解。

(2) 同上道理，有

$$51 \text{——} 39 \xrightarrow{1} 12$$

$$39 \text{——} 12 \xrightarrow{3} 3$$

得到 $(51,39)=3$，因为 $3\nmid 4$，则 4 不为 3 所整除，所以原方程没有整数解。

(3) 同上道理，有

$$121 \text{——} 11 \xrightarrow{11} 0$$

得到　$121=11^2$，即 $(121,11)=11$，因为 $11\nmid 728$，则 728 不为 11 所整除，所以原方程没有整数解。

2. 解：(1) 将原方程移项恰可因式分解为：

$(3x \quad 5)(2y + 3) \cdot 0$

根据第一章第五节引理，因为3∤5和2∤3，所以原方程没有整数解。

(2)同上理，原方程恰可因式分解为：

$(3x + 1)(7 \quad 4y) = 0$，因为3∤1和4∤7，故原方程没有整数解。

3. 解：(1)原方程常数项为0，移项后，等号二边都是一项数，它们的系数5和3都是素数，根据第一章第一节引理，得到原方程整数解的表示式为：

$x \quad 3k, y = 5k$，其中k是任意整数。

(2)根据第一章第二节引理，原方程有以下辗除横式：

12 $\frac{1}{\ }$ 7 $\frac{1}{\ }$ 5

故得到原方程整数解的表示式是：

$x \quad \frac{5}{5} \times 1 + 7k \quad 1 + 7k$

$y \quad \frac{5}{5} \times 1 + 12k = 1 + 12k$

其中k 0，±1，±2，±3，……【即k等于任意整数】

(3)根据第二章第二节(四)和(五)的引理，把原式用辗除横式和《图阶计算法》进行运算，即：

13 — 11 — — 2

11 —— 2 — 5 — 1

1 1 × 5 + 1 — 6

5 5

1

得到 行式为 13 $\frac{5}{\ }$ 11 6 1

故得到原式的整数解的表示式为：

$$x = \frac{1}{-1} \times 5 + 11k = -5 + 11k$$

$$y = \frac{1}{-1} \times 6 + 13k = -6 + 13k$$

其中 k 是任意整数，即 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots$

(4) 因为原方程常数项 36 大于 x 的系数，可先作：36 除以 x 的系数 17，取不完全商 2，余数为 2，即 $\left[\frac{36}{17}\right] = 2$，余数为 2，得到新方程为：

$$17x_1 \quad 8y = 2$$

然后仿以上解法：

$$17 \;—\; 8 \;\overset{2}{—}\; 1$$

得到 $x_1 = \frac{2}{1} \times 1 + 8k = 2 + 8k$，因 $x = 2 + x_1$，故 $x = 2 + 2 + 8k = 4 + 8k$，$y = \frac{2}{1} \times 2 + 17k = 4 + 17k$，其中 k 是任意整数。

(5) 由 $\left[\frac{59}{8}\right] = 7$，余数为 3，故得到新方程为：

$$8x_1 \; [illegible] \; 3$$

$$8 \quad 5 \quad \overset{1}{} \quad 3$$

这时，因原方程 [illegible] y 的前面是加号，它和(4)式是减号相反，故 y 是负数；得 [illegible] $\times$ [illegible] $5k$，即 $x = 7 +$ [illegible] k，[illegible] $8k$，其中 k 是任意整数。

(6) 由原方程移项整理得：

$$x(5 + 2y) \; [illegible]$$

即 $x = \frac{4 + 3y}{5 + 2y}$ (1)

根据第一章第五节(二)的引理,(A)式有以下辗除横式及演解法:

$$4+3y \xrightarrow{\ 2\ } 5+2y \xrightarrow{\ 3\ } 7$$

因“7”是素数,可得以下方程:

$5+2y=\pm 1,\ \pm 7,$

由 $5+2y=1$,得到 $y=-2$

由 $5+2y=-1$,得到 $y=-3$,

由 $5+2y=7$,得到 $y=1$

由 $5+2y=-7$,得到 $y=-6$,

以 $y=-2$ 代入(A)式,得到 $x=-2$

以 $y=-3$ 代入(A)式,得到 $x=5$

以 $y=1$ 代入(A)式,得到 $x=1$

以 $y=-6$ 代入(A)式,得到 $x=2$

故本题有四组解为:

$1\begin{cases}x=-2\\y=-2\end{cases}\quad 2\begin{cases}x=5\\y=-3\end{cases}\quad 3\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}\quad 4\begin{cases}x=2\\y=-6\end{cases}$

(7) 由原方程移项整理得:

$x(3+2y)=23-13y$

即 $x=\dfrac{23-13y}{3+2y}$ (B)

同上理(B)式有以下辗除横式和演解法:

$$23-13y \xrightarrow{\ 2\ } 3+2y \xrightarrow{\ 13\ } 85$$

$\because 85=5\times 17$

$\therefore$ 得:$3+2y=\pm 1,\ \pm 5,\ \pm 17,\ \pm 85$

由 $3+2y=1$ 得到 $y=-1$

由 $3+2y=-1$ 得到 $y=-2$

由 $3+2y=5$ 得到 $y=1$

由 $3+2y=-5$ 得到 $y=-4$

由 $3+2y=17$　得到 $y=7$

由 $3+2y=-17$　得到 $y=-10$

由 $3+2y=85$　得到 $y=41$

由 $3+2y=-85$　得到 $y=-44$

将 $y=-1,-2,1,-4,7,-10,41,-44$，逐一代入($B$)式

演算：

当 $y=-1$ 时，代入(B)式得到 $x=36$

当 $y=-2$ 时，代入(B)式得到 $x=-49$

当 $y=1$ 时，代入(B)式得到 $x=2$

当 $y=-4$ 时，代入(B)式得到 $x=-15$

当 $y=7$ 时，代入(B)式得到 $x=-4$

当 $y=-10$ 时，代入(B)式得到 $x=-9$

当 $y=41$ 时，代入(B)式得到 $x=-6$

当 $y=-44$ 时，代入(B)式得到 $x=7$

故本题有八组解：

$1\begin{cases}x=36\\y=-1,\end{cases}$　$2\begin{cases}x=-49\\y=-2,\end{cases}$　$3\begin{cases}x=2\\y=1,\end{cases}$　$4\begin{cases}x=-15\\y=-4,\end{cases}$

$5\begin{cases}x=-4\\y=7,\end{cases}$　$6\begin{cases}x=-9\\y=-10,\end{cases}$　$7\begin{cases}x=-6\\y=41,\end{cases}$　$8\begin{cases}x=7\\y=-44.\end{cases}$

4. 解：设这数左为 a，右为 b，依题意有

$$\begin{cases}a-b=3 & ①\\10a+b+6=13x & ②\end{cases}$$

以 ① 代入 ② 得：$13x-11b=36$

令 $x=\left[\frac{36}{13}\right]+x_1$　得到 $x=2+x_1$

得到新方程　$13x_1-11b=36-13\times2=10$

上式有以下辗除横式

$13 \text{——} 11 \overset{1}{\text{——}} 2$

故 $x_1 = \frac{10}{2} \times 1 + 11k = 5 + 11k$，

即 $x = 2 + 5 + 11k = 7 + 11k$

$b = \frac{10}{2} \times 1 + 13k = 5 + 13k$。

以 $b = 5 + 13k$ 代入①得：$a = 8 + 13k$，因为 a 和 b 都是一位正整数，故有

$a = 8 + 13k$　　则 $0 < a < 10$

$b = 5 + 13k$　　则 $0 < b < 10$

这时容易得到只能取 $k = 0$ 时，有 $a = 8, b = 5$，答这个二位数为85。

5. 解：设这数是 s，依题意有：

$$\begin{cases} s + 3 = 3x \\ s + 3 + 5 = 5y \\ s + 3 + 5 + 7 = 7z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 3x & ③ \\ s + 3 = 5y & ④ \\ s + 8 = 7z & ⑤ \end{cases}$$

由③④得　$5y - 3x = 3$

由一章引理，上式有：

$$x = -1 + 5k$$
$$y = 0 + 3k$$

以 $x = -1 + 5k$ 代入③得：

$s = -3 + 15k$　　⑥

由⑤⑥得　$15k - 7z = -5$　　⑦

上式有以下辗除横式：

$$15 \text{——} 7 \overset{2}{\text{——}} 1$$

同上理⑦式有

$k = -5 \times 1 + 7t = -5 + 7t$

$z = -5 \times 2 + 15t = -10 + 15t$

以 $k = -5 + 7t$ 代入⑥得：

$s = -3 + 15(-5 + 7t) = -78 + 105t$，$t$ 是整数，因为 s 是

二位数，故容易得到取 $t=1$ 时，$s=27$

答　这个二位数只有一个，就是 27。

6. 解：设 s 为棋子总数，x^2 为较大四方形图的小格数，y^2 为较小四方形图的小格数，依题意有：

$$\begin{cases} s=x^2-11 & ⑧ \\ s=y^2+6 & ⑨ \end{cases}$$

由 ⑧⑨ 得 $x^2-y^2=17 \Rightarrow (x+y)(x-y)=17$　⑩

因为 ⑩ 式右端 17 是素数，且 $x+y>x-y$，

故令 $\begin{cases} x+y=17 \\ x-y=1 \end{cases}$　⑪

由 ⑪ 式可得 $x=9, y=8$，

将 $x=9$ 代入 ⑧ 式得 $s=70$，【或将 $y=8$ 代入 ⑨ 式】

答小刘的棋子共有 70 粒。

7. 解：设这个多项式为 $f(x)$，依题意有：

$$\begin{cases} (3x+5)A+(-1)=f(x) \\ (2x+3)B+1=f(x) \end{cases}$$　⑫

由 ⑫ 式整理和移项得：$(3x+5)A-(2x+3)B=2$　⑬

由第一章第二节引理和 ⑬ 式，有以下辗除横式和图阶计算：

$3x+5 \quad 2x+3 \xrightarrow{1} x+2$

$2x+3 \longrightarrow x+2 \quad 2 \qquad 1$

$1 \quad 1\times 2+1=3$

$2 \quad 2$

1

故有　$3x+5 \xrightarrow{2} 2x+3 \xrightarrow{3} 1$

得到：$A=\dfrac{2}{1}\times 2+(2x+3)k=4+(2x+3)k$

$$B = \frac{2}{1} \times 3 + (3x+5)k = 6 + (3x+5)k$$

故这个多项式的表示式是：

$$f(x) = (3x+5)[4 + (2x+3)k] + (-1)$$
$$= 12x + 19 + (3x+5)(2x+3)k$$

或 $f(x) = (2x+3)[6 + (3x+5)k] + 1$，

其中 k 是任意整数或任意多项式

（答）

8. 解：设这个多项式为 $f(x)$，依题意有：

$$\left.\begin{aligned}(x^2+5)A + 4x = f(x)\\ (3x+2)B + x - 2 = f(x)\end{aligned}\right\} \quad ⑭$$

由 ⑭ 式整理和移项得：

$$(x^2+5)A - (3x+2)B = -3x - 2 \quad ⑮$$

上式容易得到，当 $A = 0$ 时，则 $B = 1$

同上理，$A = 0 + (3x+2)k$，$B = 1 + (x^2+5)k$

其中 k 是任意整数或任意多项式。

因原题要求首项数为 $6x^4$，显然如取 $k = 0$ 或 1，都不能达到要求，由于 $\frac{6x^4}{x^2 \cdot 3x} = 2x$ 和 $\frac{20}{5 \times 2} = 2$，故知应取 $k = 2x + 2$ 即

$A = 0 + (3x+2)(2x+2) = 6x^2 + 10x + 4$，以 $A = 6x^2 + 10x + 4$ 代入 ⑭ 式得到：

$$f(x) = (x^2+5)(6x^2+10x+4) + 4x$$
$$= 6x^4 + 10x^3 + 34x^2 + 54x + 20 \qquad \text{（答）}$$

9. 解：设这个多项式为 $f(x)$，依题意有：

$$\left.\begin{aligned}(3x^2+2x+7)A + x^3 + x^2 + 2 = f(x)\\ (4x+5)B + x^3 - x^2 + x - 12 = f(x)\end{aligned}\right\} \quad ⑯$$

由 ⑯ 整理和移项得：

$$(3x^2+2x+7)A - (4x+5)B = -2x^2 + x - 14 \quad ⑰$$

根据第一章第三节及第四节引理，本题得到辗除横式演解如

下：

$$3x^2+2x+7 \xrightarrow{4} 4x+5 \xrightarrow[\quad]{3x-2} x+38$$【此行用倍左法】⑱

将上式右端$(x+38)$去除⑰式的右数，取不完全商$-2x+77$，余数为-2940，

将⑱式继续再辗除：

$$4x+5 \xrightarrow{1} x+38 \xrightarrow{4} -147 \qquad ⑲$$

将上式右端(-147)去除余数(-2940)，取商为20，余数已被除尽。

由上可知，⑰式右数，实际可分成二部分，即

$$-2x^2+x-14=(-2x^2+x+2926)+(-2940)$$

第一部分$(-2x^2+x+2926)$为第一行辗除式的右数所整除，其商为$-2x+77$，

第二部分(-2940)为二行辗除式经图阶计算演成一行辗除式后的右数所整除，其商为-20，所以原A和B应分为

$A_1+A_2=A$，$B_1+B_2=B$

现将二行辗除式用图阶计算如下：

$3x-2\ |(3x-2)4+1=12x-7$

4 | 4

1

可演成一行式：

$$3x^2+2x+7 \xrightarrow{4\times4=16} 4x+5 \xrightarrow{12x-7} 147 \qquad ⑳$$

由⑱式得到 $A_1=(-2x+77)\times4$，$B_1=(-2x+77)(3x-2)$

整理得 $A_1=-8x+308$，$B_1=-6x^2+235x-154$

由⑳式得到 $A_2=(-20)\times16$，$B_2=(-20)(12x-7)$

整理得 $A_2 = -320$，$B_2 = -240x + 140$

故它们解的表示式是

$A = -8x - 12 + (4x + 5)k$

$B = -6x^2 - 5x - 14 + (3x^2 + 2x + 7)k$

因原题要求这个多项式的首项数为 $13x^3$，从 A 的表示式看得知 A 的首项为：$\frac{13x^3 - x^3}{3x^2} = 4x$，由于 $A = -8x - 12 + (4x + 5)k$ 和 A 的首项为 $4x$，从而得知 k 必是一单项常数。即

$A \Rightarrow 4x \pm (\quad) = -8x - 12 + (4x + 5)k$

即 $4x \pm (\quad) + 8x + 12 = (4x + 5)k$

即 $\frac{12x \pm (\quad) + 12}{4x + 5} = k$，

由计算得到 $\frac{12x + 3 + 12}{4x + 5} = k = 3$，

以 $k = 3$ 代入 $A = -8x - 12 + (4x + 5)k = 4x + 3$，

以 $A = 4x + 3$ 代入 ⑯ 式得 $13x^3 + 18x^2 + 34x + 23$

或以 $k = 3$ 代入 $B = -6x^2 - 5x - 14 + (3x^2 + 2x + 7)k$

$= 3x^2 + x + 7$，

再以 $B = 3x^2 + x + 7$ 代入 ⑯ 式得 $13x^3 + 18x^2 + 34x + 23$

答这个多项式是 $13x^3 + 18x^2 + 34x + 23$。

第二章

1. 解：在原式中，令 $3x + 4y = M$ ①

由第一章第二节引理和 ① 式有：

$$3 \times (-1) + 4 \times 1 = 1$$

故 $x = -\frac{M}{1} \times 1 + 4k = -M + 4k$

$-y = -\frac{M}{1} \times 1 + 3k = -M + 3k$ 得到 $y = M - 3k$ ②

k 是任意整数

以 ① 代入原式得到　$M + 5z = 22$　　③

由第一章第二节引理和 ③ 式有：

$M = 22 + 5v$

$z = 0 + v$　得到 $z = 0 - v$　v 是任意整数

以 $M = 22 + 5v$ 代入 ② 式得到：

$x = 22 - 5v + 4k$

$y = 22 + 5v - 3k$

故原式整数解的表示式是

$$\begin{cases} x = 22 - 5v + 4k \\ y = 22 + 5v - 3k \\ z = 0 - v \end{cases}$$

其中 v 和 k 是任意整数，即 $v, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

2. 解：在原式中令　$2x - 15y = M$【M 是整数】　　④

同上方法，④ 式有：

$2 \times 8 - 15 \times 1 = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \text{故 } x = \dfrac{M}{1} \times 8 + 15k = 8M + 15k \\ y = \dfrac{M}{1} \times 1 + 2k = M + 2k \end{array}\right\} \quad ⑤$$

以 ④ 代入原式得　$M + 11z = 33$　　⑥

故 $M = 33 + 11v$

$z = 0 + v$，即 $z = 0 - v$

【也可以由 ⑥ 式得 $M = 0 - 11z$，$z = 3 + v$】

以 $M = 33 + 11v$　代入 ⑤ 得：

$x = 8(33 + 11v) + 15k = 264 + 88v + 15k$

$y = 33 + 11v + 2k$

故原式一切整数解的表示式是：

$$\begin{cases} x = 264 + 88v + 15k \\ y = 33 + 11v + 2k \\ z = 0 \quad v \qquad \text{其中 } v, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \end{cases}$$

【也可以以 $M = 0 - 11v$ 代入 ⑤ 式得：

$x = 0 \quad 88v + 15k$

$y = 0 \quad 11v + 2k$

故原式一切整数解的表示式也可以是：

$$\begin{cases} x = 0 - 88v + 15k \\ y = 0 - 11v + 2k \\ z = 3 + v \qquad \text{其中 } v, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \end{cases}$$】

2. 解：设 a、b、c 分别为这数左中右的数字，依题意有：

$19(a + b + c) \quad (100a + 10b + c) = 9$

整理得：$9b + 18c - 81a = 9$

上式两边除以 9 得到：$b + 2c \quad 9a = 1$ ⑦

令 $b + 2c = M$，M 是整数 ⑧

由第一章引理 ⑧ 式有

$b = M \quad 2k, \ c = k \qquad k$ 也是整数

由 ⑧ 式和 ⑦ 式有 $\quad M \quad 9a = 1$ ⑨

由第一章引理 ⑨ 式有

$M = 1 + 9t, \ a = t \qquad t$ 也是整数

以 $M = 1 + 9t$ 代入 $b = M \quad 2k$ 得到 $b = 1 + 9t \quad 2k$

$$\text{故} \begin{cases} a = t \\ b = 1 + 9t - 2k \\ c = k \end{cases} \qquad ⑩$$

因为 a、b、c 都是 0 以外的一位正整数，故由 ⑩ 式得知 t 和 k 都是 0 以外的一位正整数，并由 b 的表示式得到：

$$\frac{1 + 9t}{2} > k$$

故取 $t = 1$ 时，由上式有 $5 > k > 0$

【即 $k = 1,2,3,4$】

如取 $t = 2$ 时，有 $10 > k > 4$ 【即 $k = 5,6,7,8,9$】

$t \neq 3$，否则 $14 > k > 9$ 这和 k 是一位数发生矛盾，做表如下：

t	k	$a = t$	$b = 1 + 9t - 2k$	$c = k$
1	1	1	8	1
	2	1	6	2
	3	1	4	3
	4	1	2	4
2	5	2	9	5
	6	2	7	6
	7	2	5	7
	8	2	3	8
	9	2	1	9

答由上表得知这数有 9 个，即 181，162，143，124，295，276，257，238，219。

3. 解：设 x 为公鸡数，y 为母鸡数，z 为雏鸡数，依题意有：

$$\begin{cases} x + y + z = 100 & ⑪ \\ \frac{7}{3}x + \frac{5}{4}y + \frac{2}{5}z = 100 & ⑫ \end{cases}$$

由 ⑫ 得：$140x + 75y + 24z = 6000$　　⑬

⑫ $- 24 \times$ ⑪：$116x + 51y = 3600$　　⑭

令 $x = \left[\frac{3600}{116}\right] + x_1$　得到 $x = 31 + x_1$

由 ⑭ 式得到新方程　$116x_1 + 51y = 3600 - 31 \times 116 = 4$　　⑮

利用辗除行式

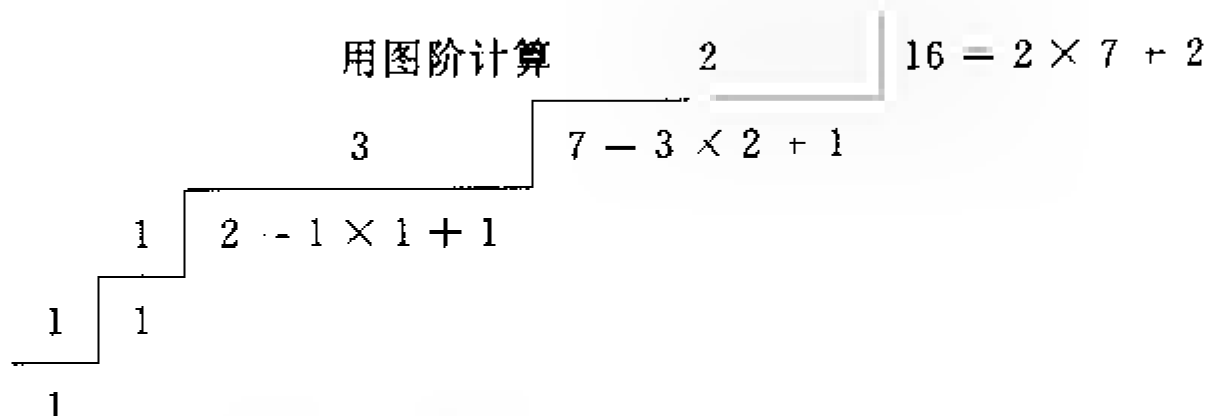
116 —— 51 $\xrightarrow{2}$ 14

51 —— 14 $\xrightarrow{3}$ 9

14 —— 9 $\xrightarrow{1}$ 5

9 —— 5 $\xrightarrow{1}$ 4

将辗除横式右横线上数字写在图阶上，图阶上下二数相乘再加下阶内数字得出的数字写入上阶内，如此由底至顶递次计算。



得到 $116\times 7-51\times 16=-4$

⑮ 式的解 $x_1=7\times(-1)+51k=-7+51k$

$y=-16\times(-1)-116k=16-116k$

其中 k 为整数

以 x_1 代入 $x=31+x_1$ 得到 $x=24+51k$

以 $x=24+51k$，$y=16-116k$ 代入 ① 得：$z=60+65k$

方程式解 $\begin{cases} x=24+51k & \text{因 } x\geqslant 0 \text{ 故 } k\geqslant -\frac{24}{51} \\ y=16-116k & \text{因 } y\geqslant 0 \text{ 故 } k\leqslant \frac{16}{116} \\ z=60+65k & \text{因 } z\geqslant 0 \text{ 故 } k\geqslant -\frac{60}{65} \end{cases}$

因 k 是整数，故取 $k=0$，得到：

$x=24$【公鸡】$y=16$【母鸡】$z=60$【雏鸡】（答）

4. 解：设小华爷爷今年【指 1993 年】岁数为 x，爷爷是本世纪出生，出生那年公元末二位数字为 a、b，依题意有下列方程：

$$\begin{cases} x=4(1+9+a+b) & ⑯ \\ x=1993-(1900+10a+b) & ⑰ \end{cases}$$

由 ⑯⑰ 式得：$14a+5b=53$

令 $a = \left[\dfrac{53}{14}\right] + a_1$　得到 $a = 3 + a_1$

得到新方程　$14a_1 + 5b = 53 - 14 \times 3 = 11$

得到辗除行式　$14 \quad \overset{1}{} \quad 5 \quad \overset{3}{} \quad -1$

解得：$a_1 = \quad 11 \times 1 + 5k$ 代入 $a = 3 + a_1 = \quad 8 + 5k$

$b = \quad 3 \times (-11) \quad 14k - 33 \quad 14k$

因 a、b 都是正整数，故取 $k = 2$，得到 $a = 2$，$b = 5$

以 a、b 值代入 ⑰ 式得：$x = 68$，即小华爷爷今年【指 1993 年】的岁数。

设小珠的爷爷今年【指 1993 年】岁数为 y，也是本世纪出生，出生那年的四位数字是 $19cd$ 年，依题意有下列方程：

$$\begin{cases} y \quad 10 - 4(1 + 9 + c + d) & ⑱ \\ y \quad 1993 \quad (1900 + 10c + d) & ⑲ \end{cases}$$

由 ⑱⑲ 式得：$14c + 5d = 43$

令 $c = \left[\dfrac{43}{14}\right] + c_1$ 得到 $c = 3 + c_1$

得到新方程：$14c_1 + 5d \quad 43 \quad 14 \times 3 \quad 1$

得到辗除行式　$14 \quad \overset{1}{} \quad 5 \quad \overset{3}{} \quad 1$

解得 $c_1 \quad 1 + 5k$ 代入 $c = 3 + c_1 \quad -2 + 5k$，$d = 3 - 14k$

因 c、d 都是一位正整数，故取 $k \quad 0$。

得到 $c = 2$，$d = 3$

以 c、d 值代入 ⑲ 式得：$y = 70$，即小珠爷爷今年【指 1993 年】的岁数。　（答）

5. 解：设这些二位数为 s，依题意得：

$$\begin{cases} s = 3x & ⑳ \\ s + 3 \quad 4y & ㉑ \\ s + 3 + 4 = 5z & ㉒ \end{cases}$$

由 ⑳㉑ 式得：$4y \quad 3x - 3$

解得：$x = \quad 1 + 4k \quad y = 0 + 3k$

以 $x \quad\quad 1 + 4k$ 代入⑳式得 $s = \quad 3 + 12k$ ㉓

由㉒㉓式得：$12k \quad 5z = \quad 4$

解得 $k = \quad 2 + 5t \quad z = \quad 4 + 12t$

以 $k = \quad 2 + 5t$ 代入㉓式得：$s = \quad 27 + 60t$，t 是整数。

取 $t = 1、2$ 时，得到 $s = 33、93$。

答这些二位数是 33 和 93。

6. 解：设 a 为左数，b 为右数，依题意有：

$$\begin{cases} a - b = 6 & ㉔ \\ 10a + b + 7 = 5x & ㉕ \end{cases}$$

由㉔㉕式得：$11b \quad 5x \quad\quad 67$

令 $b = \left[\frac{-67}{11}\right] + b_1$ 得到 $b = \quad 6 + b_1$

得到新方程：$11b_1 - 5x = -67 \quad (\quad 6) \times 11 = \quad 1$

得到辗除行式：$11 \xrightarrow{1} 5 \xrightarrow{2} 1$

解得：$b_1 = 1 \times (-1) + 5k$ 代入 $b = -6 + b_1 = \quad 7 + 5k$

$x = 2 \times (\quad 1) + 11k = -2 + 11k$

由㉔式和 a、b 都是一位正整数，故取 $k = 2$，得到 $a = 9, b = 3$

答这个二位数是 93。

7. 解：设 a、b、c 为这个三位数的左、中、右三数，依题意有：

$(a + b + c)41 + 7 = 100a + 10b + c$

移项整理得：$59a - 31b \quad 40c \quad 7$ ㉖

令 $\quad 59a \quad 31b = M$ ㉗

将㉗代入㉖：$M \quad 40c = 7$ ㉘

㉘式解得：$M = 7 + 40k, c = k$，k 是整数。

由㉗式有以下辗除行（横）式

$59 \quad\quad 31 \xrightarrow{1} 28$

31 —— 28 —1— 3

28 —— 3 —9— 1

由以上辗除行式作图阶

1　　　　　19 = 1 × 10 + 9

1　　10 = 1 × 9 + 1

9　　9

1

由图阶得：59　1 × 9 + 1 = 10　31　1 × 10 + 9 = 19　1

故 $a = \frac{M}{1} \times 10 + 31v, b = \frac{M}{1} \times 19 + 59v$

其中 v 是整数

以 $M = 7 + 40k$ 分别代入上式得到

$a = (7 + 40k)10 + 31v, b = (7 + 40k)19 + 59v,$

∵a、b、c 是一位数，且是正整数

∴ 通解取 $k = 1, v = -15$ 时，得到$\begin{cases} a = 5 \\ b = 8 \\ c = 1 \end{cases}$

取 $k = 2, v = -28$ 时，得到$\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$

答这数有二，即 581、212。

8. 解：设这二位数字，左为 a，右为 b，k 为大于零的正整数，依题意有：

$10a + b = abk$

移项得：$b = abk - 10a$

即　$b = a(bk - 10)$

变形为：$\frac{b}{a} = bk - 10$

移项为：$\frac{b}{a} + 10 = bk$ (a)

取$\frac{b}{a} = 1$，代入(a)式，得到(a)式的左端等于11，是质数，故有唯一解，即$a = 1, b = 1, k = 11$，

取$\frac{b}{a} = 2$，则有$\frac{b}{a} = \frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}$，

分别代入(a)式

得到：$a = 1, b = 2, k = 6$，

$a = 2, b = 4, k = 3$，

$a = 3, b = 6, k = 2$，

因为$12 = 8k$时，k的解不是整数，故舍去$\frac{b}{a} = \frac{8}{4}$。

取$\frac{b}{a} = 3$，代入(a)式：$13 = bk$，因$b \geqslant 3$，而13是质数，得到(a)式没整数解，故舍去$\frac{b}{a} = 3$。

取$\frac{b}{a} = 4$，得到b值只有4或8，分别代入(a)式得：

$14 = 4k, 14 = 8k$，它们均无整数解。

取$\frac{b}{a} = 5$，有$\frac{5}{1}$，代入(a)式得$15 = 5k$解得：

$a = 1, b = 5, k = 3$。

取$\frac{b}{a} = 6$，或7、或8、或9，代入(a)式得

$16 = 6k, 17 = 7k, 18 = 8k, 19 = 9k$，它们都无整数解。

由以上得知，这些二位数共五个：即11、12、24、36、15。

9. 解：设栽密些，每行x株，栽疏些每行y株，依题意：

$x^2 - 15 = y^2 + 8$

将上式移项并分解为：$(x + y)(x - y) = 23$

上式右边23是质数，唯有：23×1

又因$(x+y)>(x-y)$故可令：$x+y=23, x-y=1$，

解得：$x=12, y=11$。

得到树苗数为 $x^2-15=129$，或 $y^2+8=129$ （答）

第三章

解：(1) 解 由第三章第一节的引理，原式的正整数解的表示式是：

$$x=k^3,\quad y=k^2\qquad k=0,1,2,3,\cdots\cdots$$

(2) 解 由第三章第二节的引理，原式有：

$$2(2^a\times 3^b)^3=3(2^c\times 3^d)^2$$

将上式变为求解以下方程：

$$3a+1=2c$$

$$3b=2d+1$$

用第一章引理以上方程的解为：

$$a=1+2n,\quad c=2+3n$$

$$b=1+2m,\quad d=1+3m$$

故得到(2)式正整数解的表示式为：

$$x=2^{1+2n}\times 3^{1+2m}$$

$$y=2^{2+3n}\times 3^{1+3m}$$

其中 $m,n=0,1,2,3,\cdots\cdots$

(3) 解 用同(2)式的方法，可得到原式正整数解的表示式为：

$$x=2^{1+2n}\times 5^{1+2m}$$

$$y=2^{1+n}\times 5^{0+m}$$ 其中 $m,n=0,1,2,3,\cdots\cdots$

2. 解：(1) 由第三章第二节引理，原式有：

$$3(3^a\times 5^b)^2=5(3^c\times 5^d)^4$$

上式中由于 $2a+1=4c$ ①

$2b=4d+1$ ②

①和②它们等号二边都是一奇一偶，得知无整数解，从而原式无正整数解。

(2) 由第二章第二节引理，原式有：

$$3^2(3^a \times 5^b)^3 = 5^2(3^c \times 5^d)^9$$

上式中有：

$$\left.\begin{aligned} 3a + 2 &= 9c \\ 9d + 2 &= 3b \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

由第一章引理，∵$(3,9) = 3 \nmid 2$，∴(A) 无整数解，从而原式无正整数解【注，(A) 中只要其中一式无解，则原式无解】。

(3) 同上理，原式有：

$$2^3 \times 3(2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d)^5 = 5 \times 7(2^{a'} \times 3^{b'} \times 5^{c'} \times 7^{d'})^{10}$$

上式中有：

$$\left.\begin{aligned} 5a + 3 = 10a'&,\ 5b + 1 = 10b' \\ 5c &= 10c' + 1 \\ 5d &= 10d' + 1 \end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

∵$(5,10) = 5 \nmid 1,3$，∴(B) 无整数解，从而原式无正整数解

(4) 由原式有：

$$11^2(11^a \times 2^b)^3 = 2^3(11^{a'} \times 2^{b'})^6$$

上式中有：

$$3a + 2 = 6a' \qquad ③$$

$$3b = 6b' + 3 \qquad ④$$

因 $(3,6) = 3 \nmid 2$，故知③无整数解，从而原式无正整数解

3. 解：用本章第四节二种方法解 $x^2 - 11y^2 = 7$ ⑤

解一 用裴尔方程解法，

先求适合条件 $r^2 \equiv 11 (mod\ 7)$ 诸解，也就是在 $r^2 = 11 - 7h, r^2 \leqslant 3^2$ 中求适当的 h，使 $11 - 7h$ 是一个平方数，得到 $h = 1$ 时，$r = 2, \eta = 1$，故转为解方程：$x_1^2 - 11y_1^2 = 1$

用连分数法得：

$$\sqrt{11}=3+\sqrt{11}-3=3+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{11}+3}{2}}$$

$$=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{3+\sqrt{11}-3}{2}}=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{\sqrt{11}-3}{2}}$$

$$=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\sqrt{11}+3}}=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+3+\sqrt{11}-3}}$$

$$=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\sqrt{11}-3}}=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\cfrac{2}{\sqrt{11}+3}}}$$

$$=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{11}+3}{2}}}}$$

$$=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+\cfrac{3+\sqrt{11}-3}{2}}}}$$

$$=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+\cfrac{\sqrt{11}-3}{2}}}}=[3,3,6]$$

由以上连分数造表

n		1	2	3	4	
a		3	3	6	3	
p	1	3	10	63	199	
Q	0	1	3	19	60	

由以上连分数得知 $\alpha = \sqrt{11} = a_1 + \frac{1}{\alpha_1}$

$a_1 = 3, \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{11} - 3}$，也即 $\frac{1}{\alpha_1} = \sqrt{11} - 3 = \frac{2}{\sqrt{11} + 3}$，

$a_2 = 3, \alpha_2 = \sqrt{11} + 3, \frac{1}{\alpha_2} = \frac{1}{\sqrt{11} + 3}$

$a_3 = 6, \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{11} - 3}, \frac{1}{\alpha_3} = \frac{2}{\sqrt{11} + 3}$

当 $n = 1$ 时，则 $x^2 - 11y^2 = (-1)^1 2 = -2$

$n = 2$ 时，则 $x^2 - 11y^2 = (-1)^2 1 = 1$

$n = 3$ 时，则 $x^2 - 11y^2 = (-1)^3 2 = -2$

故由表可得 ⑥ 式的解为：$x_1, y_1 = (10, 3)$

即 $x_1 + y_1\sqrt{11} = \pm(10 + 3\sqrt{11})^t$

于是得到：

$$x = \frac{\eta \times 11 y_1 \pm r x_1}{\eta h} = \frac{1 \times 11 \times 3 \pm 2 \times 10}{1}$$

$$= 13, \quad 53,$$

$$y = \frac{-\eta \times x_1 \pm r y_1}{\eta h} = \frac{-10 \pm 2 \times 3}{1} = -4, -16,$$

故 ⑤ 式的解是：

$$x + y\sqrt{11} = \pm(10 + 3\sqrt{11})^t(13 \pm 4\sqrt{11})$$

$$\text{或} \pm(10 + 3\sqrt{11})^t(53 \pm 16\sqrt{11})$$

第二种方法：

将 ⑤ 移项为 $x^2 + 7 = 11y^2$ ⑦

先解同余式 $x^2 \equiv -7 \pmod{11} \Rightarrow x^2 \equiv 4 \pmod{11}$

$\Rightarrow x \equiv 2 \pmod{11}$

即 $x = \pm 2 + 11t, t = 0, 1, 2, 3, \cdots\cdots$

造表

t	0	1	2	3	4	5	…
$x=2+11t$	2	13	24	35	46	57	…
$h=\frac{x^2+7}{11}$	1	16	53	112	193	296	…
$x=-2+11t$	−2	9	20	31	42	53	…
$h=\frac{x^2+7}{11}$	1	8	37	88	161	256	…

由上表可得⑦的解为(2,1),(13,4),(53,16),…

再求解 $x^2-11y^2=1$ ⑧

用同以上方法可得:$x=\pm1+11t$,

造表

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
$x=1+11t$	1	12	23	34	45	56	67	78	89	100	111	
$h=\frac{x^2-1}{11}$	0	13	48	105	184	285	408	553	720	909	1120	
$x=-1+11t$	−1	10	21	32	43	54	65	76	87	98	109	
$h=\frac{x^2-1}{11}$	0	9	40	93	168	265	384	525	688	873	1080	

由上表可得⑧的解为:(1,0),(10,3)

于是得到⑤式的一切解为:$x+y\sqrt{11}=\pm(10+3\sqrt{11})^t(2\pm\sqrt{11})$ 或 $\pm(10+3\sqrt{11})^t(13\pm4\sqrt{11})$ 等等。

4. 解:先将 $\sqrt{23}$ 做连分数得到:【连分数列写法,请阅第四节或上题,下边的写法是作者将它简化后的一种写法,可参考选用】

$$\sqrt{23}=4+\left(\frac{7}{\sqrt{23}+4}\right)+1+\left(\frac{2}{\sqrt{23}+3}\right)+3+\left(\frac{7}{\sqrt{23}+3}\right)+1+\left(\frac{1}{\sqrt{23}+4}\right)+8+\left(\frac{7}{\sqrt{23}+4}\right)+1+\cdots\cdots$$

即 $\sqrt{23}=[4,\dot{1},3,1,\dot{8}]$

造表如下

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	
a		4	1	3	1	8	1	3	1	8	…
P	1	4	5	19	24	211	235	916	1151	10124	…
Q	0	1	1	4	5	44	49	191	240	2111	…
k		−7	2	−7	1	−7	2	−7	1	−7	

其中 k 是 $\frac{1}{a_n}$ 的分子，即如以上连分数中括号内的分子。

(1) 式中：$M=h^2k=3^2\times 2=18$，

又由表得到 $k_2=2$，即 $x_1^2-23y_1^2=2$ 有解，且它的解为 $x_1+y_1\sqrt{23}=\pm(5+\sqrt{23})$，$\pm(235+49\sqrt{23})$，… 故由第五节（一）的第 2 引理得到(1) 方程的解为：

$$\begin{cases} x=3\times 5, 3\times 235, \cdots \\ y=3\times 1, 3\times 49, \cdots \end{cases}$$

(2) 解　(2) $\Rightarrow (5x+2y)(2x-y)=16$

令 $a=5x+2y$，$b=2x-y$，即 $y=2x-b$

$a+2b=9x$　即 $a=9x-2b$

由上得：$ab=16 \Rightarrow (9x-2b)b=16$

$$\text{即 } x=\frac{ab+2b^2}{9b}=\frac{a+2b}{9}$$

$$y=2x-b=\frac{2a-5b}{9}$$

因为　$16=ab=1\times 16=2\times 8=4\times 4$

故经过逐一计算后得知，

当 $\begin{cases} a=16, 2, \\ b=1, 8, \end{cases}$ 时，得到(2) 的解为 $\begin{cases} x=2, 2 \\ y=3, -4 \end{cases}$

(3) 解　用第五节（二）的方法：

(3) $\Rightarrow (6x+7y)^2-(7^2+4\times 3\times 8)y^2=4\times 3\times 37$

令 $6x+7y=D$

即(3) $\Rightarrow D^2-145y^2=2^2\times 111$　　⑨

$$\Rightarrow\begin{cases} D_1^2 - 145y_1^2 = 2^2 \\ D_2^2 - 145y_2^2 = 111 \end{cases}$$

故要先解 $D_2^2 - 145y_2^2 = 111$ ⑩

因 $r^2 - 145 = 111h$ 中求得 $r = 16, h = 1, \eta = 1$

故再转为求 $D_3^2 - 145y_3^2 = 1$ ⑪

用连分数法得:

$$\sqrt{145} = [12, \overline{24}]$$

造表以下

		1	2	3	4	
a		12	24	24	24	……
P	1	12	289	6948	167041	……
Q	0	1	24	577	13872	……
k		1	1	1	1	

由表得知 ⑪ 的解为 $D_3 + y_3\sqrt{145} = (289 \pm 24\sqrt{145})$,故知 ⑩ 的解为 $D_2 + y_2\sqrt{145} = (289 \pm 24\sqrt{145})^n(16 \pm \sqrt{145})$,从而得到 ⑨ 的解为 $(D, y) = (2D_2, 2y_2)$

在 ⑩ 的解式中 $n = 0, 1, 2, 3, \cdots\cdots$

如取 $n = 0$,得到 $D = 2 \times 16, y = 2 \times 1$,以 $D = 2 \times 16$ 代入 $6x + 7y = D$,解得 $x = 3$。如取 $n = 1$,得到 $D = 2 \times 8104, y = 2 \times 673$,以 $D = 2 \times 8104$ 代入 $6x + 7y = D$,解得 $x = 1131$,其余类推。

故(3)式的解为: $\begin{cases} x = 3, 1131, \cdots\cdots \\ y = 2, 1346, \cdots\cdots \end{cases}$

(4)解 由第五节(一)的引理(4)式有:

$$x^2 - 23y^2 = 56 \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 - 23y_1^2 = 2^3 & ⑫ \\ x_2^2 - 23y_2^2 = 7 & ⑬ \end{cases}$$

由(1)式解中的连分数表得知:

⑫ 式的一组解为:$(5 \pm \sqrt{23})^3$

⑬式的一组解为：$(4 \pm \sqrt{23})$

故(4)式的一组解为：$(5 \pm \sqrt{23})^3(4 + \sqrt{23})$

如果改取连分数表中(k_3)，即$(19 + 4\sqrt{23})$为⑬式的一组解，可得到(4)式又一组解为$\pm(5 + \sqrt{23})^3(19 + 4\sqrt{23})$，再将式中的正负符号取如下式去计算：

$$(5 + \sqrt{23})^3(19 \quad 4\sqrt{23}) - (86 + 18\sqrt{23})$$

又由表知，取 k_4 时有 $x^2 \quad 23y^2 - 1$ 的一组解为$(24 \quad 5\sqrt{23})$，从而得到

$(86 + 18\sqrt{23})(24 \quad 5\sqrt{23}) - (6 - 2\sqrt{23})$是(4)式绝对值较小的一组解。

其余的解均可仿此方法去计算。

第四章

1．解　$2x^2 + 5x + 1 = 17y$　①

上题用第四章奇偶数演算法有：

$$①\Rightarrow\begin{cases}4m^2 + 5m \quad 8 - 17n & ②\\ 4m^2 + 9m + 4 - 17n & ③\end{cases}$$

$$②\Rightarrow\begin{cases}8m_1^2 + 5m_1 - 4 = 17n_1 & ④\\ 8m_1^2 + 13m_1 \quad 8 - 17n_1 & ⑤\end{cases}$$

$$③\Rightarrow\begin{cases}8m_1^2 + 9m_1 + 2 - 17n_1 & ⑥\\ 8m_1^2 + 17m_1 - 17n_1 & ⑦\end{cases}$$

$$④\Rightarrow\begin{cases}16m_2^2 + 5m_2 \quad 2 = 17n_2 & ⑧\\ 16m_2^2 + 21m_2 \quad 4 - 17n_2 & ⑨\end{cases}$$

$$⑤\Rightarrow\begin{cases}16m_2^2 + 13m_2 - 4 = 17n_2 & ⑩\\ 16m_2^2 + 29m_2 - 17n_2 & ⑪\end{cases}$$

$$⑥\Rightarrow\begin{cases}16m_2^2 + 9m_2 + 1 \quad 17n_2 & ⑫\\ 16m_2^2 + 25m_2 + 1 - 17n_2 & ⑬\end{cases}$$

……………………

由③式容易得到$\begin{cases} m=1 \\ n=1 \end{cases}$　并由此逆算得①式的解

$$\begin{cases} x=2m+1=3 \\ y=2n=2 \end{cases}$$

由⑦式容易得到$\begin{cases} m_1=0 \\ n_1=0 \end{cases}$　并逆算得①式的解$\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

由⑩式得到$\begin{cases} m_2=2 \\ n_2=2 \end{cases}$　并逆算得①式的解$\begin{cases} x=14 \\ y=19 \end{cases}$

第二种解法:

将①式代入求根公式:

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2+4\times2(17y-1)}}{2\times2}=\frac{-5\pm\sqrt{17+136y}}{2\times2}$$

令$r^2=17+136y$　再用求二次同余式的解法

即$r^2\equiv17(mod136)$用孙子定理可得$\Rightarrow r\equiv\pm17,\pm51(mod136)$

得到$r=17+136t$和$r=51+136t$

故①式有二个解的表示式为:

$$1\begin{cases} x=\dfrac{-5\pm(17+136t)}{4} \\ y=\dfrac{(17+136t)^2-17}{136}=136t^2+34t+2 \end{cases}$$

$$2\begin{cases} x=\dfrac{-5\pm(51+136t)}{4} \\ y=\dfrac{(51+136t)^2-17}{136}=136t^2+102t+19 \end{cases}$$

其中:①$t=0,\pm1,\pm2,\cdots$

②x的表示式中"$\pm$"由通过整数解选择。

第三种解法:

将①式换成同余式,即:

①$\Rightarrow2x^2+5x+1\equiv0(mod17)\Rightarrow2x^2+5x-33\equiv0(mod17)$

$$\Rightarrow (2x+11)(x-3) \equiv 0 \pmod{17} \Rightarrow x \equiv 3 \pmod{17}$$

或

$$① \Rightarrow 2x^2+5x+1 \equiv 0 \pmod{17} \Rightarrow 2x^2-12x+18 \equiv 0 \pmod{17}$$

$$\Rightarrow (2x-6)(x-3) \equiv 0 \pmod{17} \Rightarrow x \equiv 3 \pmod{17}$$

$$\therefore \begin{cases} x = 3+17t \\ y = \dfrac{2(3+17t)^2+5(3+17t)+1}{17} = 2+17t+34t^2 \end{cases}$$

其中 $t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

2. 解：用第四章奇偶数演算法：

$$① \Rightarrow \begin{cases} 44m^3+4m^2+5m+31 = 2n^2+2n \\ \Rightarrow 176m_1^3+272m_1^2+145m_1+42 = n^2+n & ⑭ \\ 44m^3+70m^2+42m+40 = 2n^2+2n \\ \Rightarrow 22m^3+35m^2+21m+20 = n^2+n & ⑮ \end{cases}$$

$$⑭ \Rightarrow \begin{cases} 704m_2^3+544m_2^2+145m_2+21 = 2n_1^2+n_1 & ⑯ \\ 704m_2^3+544m_2^2+145m_2+20 = 2n_1^2+3n_1 & ⑰ \end{cases}$$

$$⑮ \Rightarrow \begin{cases} 88m_1^3+70m_1^2+21m_1+10 = 2n_1^2+n_1 & ⑱ \\ 88m_1^3+70m_1^2+21m_1+9 = 2n_1^2+3n_1 & ⑲ \\ 88m_1^3+202m_1^2+157m_1+49 = 2n_1^2+n_1 & ⑳ \\ 88m_1^3+202m_1^2+157m_1+48 = 2n_1^2+3n_1 & ㉑ \end{cases}$$

$$⑯ \Rightarrow \begin{cases} 2816m_3^3+1088m_3^2+145m_3+9 = 4n_2^2+3n_2 & ㉒ \\ 2816m_3^3+5312m_3^2+3345m_3+707 = 4n_2^2+n_2 & ㉓ \end{cases}$$

$$⑰ \Rightarrow \begin{cases} 2816m_3^3+1088m_3^2+145m_3+10 = 4n_2^2+3n_2 & ㉔ \\ 2816m_3^3+5312m_3^2+3345m_3+704 = 4n_2^2+7n_2 & ㉕ \end{cases}$$

$$⑱ \Rightarrow \begin{cases} 352m_2^3+140m_2^2+21m_2+5 = 4n_2^2+n_2 & ㉖ \\ 352m_2^3+668m_2^3+425m_2+93 = 4n_2^2+5n_2 & ㉗ \end{cases}$$

$$⑲ \Rightarrow \begin{cases} 352m_2^3+140m_2^2+21m_2+2 = 4n_2^2+7n_2 & ㉖ \\ 352m_2^3+668m_2^3+425m_2+94 = 4n_2^2+3n_2 & ㉙ \end{cases}$$

$$⑳ \Rightarrow \begin{cases} 352m_2^3 + 404m_2^2 + 157m_2 + 23 = 4n_2^2 + 5n_2 & ㉚ \\ 352m_2^3 + 932m_2^2 + 825m_2 + 248 = 4n_2^2 + n_2 & ㉛ \end{cases}$$

$$㉑ \Rightarrow \begin{cases} 352m_2^3 + 404m_2^2 + 157m_2 + 24 = 4n_2^2 + 3n_2 & ㉜ \\ 352m_2^3 + 932m_2^2 + 825m_2 + 245 = 4n_2^2 + 7n_2 & ㉝ \end{cases}$$

……………

由⑭式容易观察得知：$42 = 6 \times 7$【因⑭式右端等于二个连续数之积】故⑭式有一组解为：$\begin{cases} m_1 = 0 \\ n = 6 \end{cases}$

由⑮式【同上情况】得到一组解为：$\begin{cases} m = 0 \\ n = 4 \end{cases}$

由⑯式用“二项试算”得到 $m_2 = 0, n_1 = 3$

由⑰式用“二项试算”得到 $m_2 = 0, n_1 = -4$

由⑱式用“二项试算”得到 $m_1 = 0, n_1 = 2$

由⑲式用“二项试算”得到一组解为：$m_1 = 0, n_1 = -3$

由㉔式用“三项试算”得到一组解为：$m_3 = 0, n_2 = -2$

由㉖式容易得到一组解为：$m_2 = 0, n_2 = 1$

由㉛式用“三项试算”得到一组解为：$m_2 = 0, n_2 = -8$

由㉝式用“三项试算”得到一组解为：$m_2 = 0, n_2 = 7$

由⑭⑯的解逆算得到①式【即原式，下同】的一组解为

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 13 \end{cases}$$

由⑮⑱㉖的解逆算得到①式的一组解为：$x = 1, y = 9$，

由⑰㉔的解逆算得到①式的一组解为：$x = 2, y = -13$，

由⑲的解逆算得到①式的一组解为：$x = 1, y = -9$，

由㉛的解逆算得到①式的一组解为：$x = 7, y = -63$，

由㉝的解逆算得到①式的一组解为：$x = 7, y = 63$，

本题用“奇偶数演算法”演算至㉝式得到下列诸解：

1 $\begin{cases} x = 2 \\ y = \pm 13 \end{cases}$　　2 $\begin{cases} x = 1 \\ y = \pm 9 \end{cases}$　　3 $\begin{cases} x = 7 \\ y = \pm 63 \end{cases}$

3. 解：用"奇偶数演算法"演解：

$$4m^3 = 1 - 2n^2 \quad ㉞$$

$$① \Rightarrow \begin{cases} 4m^3 + 6m^2 + 3m = 1 - 2n^2 + 2n \\ \Rightarrow 16m_1^3 + 36m_1^2 + 27m_1 + 6 = -n^2 + n \quad ㉟ \end{cases}$$

由㉞式易知无解，即在①式中若 x 和 y 均取偶数时，方程无解。

$$㉟ \Rightarrow \begin{cases} 64m_2^3 + 72m_2^2 + 27m_2 + 3 = -2n_1^2 + n_1 \quad ㊱ \\ 64m_2^3 + 72m_2^2 + 27m_2 + 2 = -2n_1^2 + 3n_1 \quad ㊲ \end{cases}$$

……………………………

在㉟式中，右端等于二个连续数之积，因常数项：$6 = 2 \times 3$，故得到㉟式一组解为：$m_1 = 0, n = -2$，并由此逆算得到①的解为：

$$x = 2m + 1 = 2(2m_1 + 1) + 1 = 4m_1 + 3 = 3$$

$$y = 2n + 1 = 2 \times 2 + 1 = 5$$

由㊱式用"二项试算"得到 $m_2 = 0, n_1 = 1$，逆算可得①式的解为：$x = 3, y = 5$

由㊲式用"二项试算"得到 $m_2 = 0, n_1 = -2$，逆算可得①式的解为：$x = 3, y = -5$

本题由①式演至㊲式，得到的解为

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = \pm 5 \end{cases}$$

4. 解：用"奇偶数演算法"演解：

$$① \Rightarrow \begin{cases} 12m^3 + 8m^2 + 5m = 4 - 8n^2 + 15n \quad ㊳ \\ 12m^3 + 26m^2 + 22m + 2 = -8n^2 + 15n \\ \Rightarrow 6m^3 + 13m^2 + 11m + 1 = 16n_1^2 + 15n_1 \quad ㊴ \end{cases}$$

$$㊳ \Rightarrow \begin{cases} 48m_1^3 + 16m_1^2 + 5m_1 = 2 - 16n_1^2 + 15n_1 \quad ㊵ \\ 48m_1^3 + 88m_1^2 + 57m_1 + 1 = 16n_1^2 + 31n_1 \quad ㊶ \end{cases}$$

$$㊴ \Rightarrow \begin{cases} 24m_1^3 + 26m_1^2 + 11m_1 = 15 - 32n_2^2 + 47n_2 \quad ㊷ \\ 24m_1^3 + 62m_1^2 - 55m_1 = 32n_2^2 + 47n_2 \quad ㊸ \end{cases}$$

$$㊵\Rightarrow\begin{cases}192m_2^3+32m_2^2+5m_2-1=32n_2^2+15n_2 & ㊹\\ 192m_2^3+320m_2^2+181m_2+18=32n_2^2+47n_2 & ㊺\end{cases}$$

$$㊶\Rightarrow\begin{cases}192m_2^3+176m_2^2+57m_2-24=32n_2^2+63n_2 & ㊻\\ 192m_2^3+464m_2^2+377m_2+96=32n_2^2+31n_2 & ㊼\end{cases}$$

……………………………………

由 ㊴ 式易得 $m=1, n_1=1$，逆算得到 ① 的解之1：$\begin{cases}x=3\\ y=5,\end{cases}$

又由 ㊴ 式“二项试算”得 $m=0, n_1=-1$，逆算得 ① 解之 2：

$\begin{cases}x=1\\ y=-3,\end{cases}$

注：由 ㊷ 式得到的解，逆算后同于 ㊴ 式逆算得第 2 解，由 ㊸ 式得到的解，逆算后同于 ㊴ 式逆算得第 1 解。

本题由 ① 演至 ㊴ 得到解为：

$$1\quad\begin{cases}x=3\\ y=5,\end{cases}\qquad 2\quad\begin{cases}x=1\\ y=-3。\end{cases}$$

5. 解：从 10 月 2 日起至明年元旦止计算天数是：10 月份尚有 30 天，11 月份 30 天，12 月份 31 天，元旦这天 1 天共计 92 天。因为每星期有 7 天，而今天是星期一，故有 92 加 1 除以 7 余数是 2。如以同余数式，即有：设 x 为所求的星期几。

$$x\equiv 92+1\equiv 93\equiv 2(mod7)$$

答：明年元旦是星期二。

6. 解：设赛程长 x 里，

马 24 分钟跑的路程是 $150\times\frac{24}{60}=60$

牛 15 分钟跑的路程是 $120\times\frac{15}{60}=30$

依题意有：

$$\begin{cases} x \equiv 60 & (mod150) \\ x \equiv 30 & (mod120) \\ x \equiv 0 & (mod90) \end{cases}$$

因这个同余式组的模不是二二互素，为了简化，可以把它换成二二互素，换后的模是原模的因数，原同余式组模的最小公倍也是新同余式组模的最小公倍，这样新组的解也就是原组的解。按这要求得到：

$$\begin{cases} x \equiv 60 \equiv 10 & (mod25) & (50) \\ x \equiv 30 \equiv 6 & (mod8) & (51) \\ x \equiv 0 & (mod9) & (52) \end{cases}$$

用辗转相除行式【即横式】解：

由(50)(51) 立式：$25a + 10 = 8b + 6$

移项：$25a - 8b = 6 - 10 = -4$

辗除行式是：

$$25 \xrightarrow{\ 1\ } 8 \xrightarrow{\ 3\ } 1$$【即余数是1】

这里只需求 a 的解

故得到 $a = \frac{-4}{1} \times 1 + 8k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots$

取 $k = 1$，使 a 的解是正整数

$\therefore a = -4 + 8 \times 1 = 4$

即 $x \equiv 4 \times 25 + 10 \equiv 110 (mod25 \times 8)$ (53)

由(52)(53) 立式：$200a' + 110 = 9b'$

移项 $200a' - 9b' = -110$

这里也只需求出 a' 解

将 -110 削简为：因 $\left[\frac{-110}{9}\right] = -12$

故有 $-110 - (-12 \times 9) = -2$

即新方程：$200a' - 9b'_1 = -2$

辗除行式是

$$200 \cdot 9 \frac{22}{} \quad 2$$

故 $a' \quad \frac{2}{2} + 9k \quad 1 + 9k$

k 是整数，$k \quad 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

这里取 $k = 1$，于是得到

$$a' \quad 8$$

$$x = 8 \times 200 + 110 = 1710 (mod 1800)$$

故赛程有 1710 里。

马跑 11 小时又 24 分钟（$\left[\frac{1710}{150}\right] \quad 11$）

牛跑 14 小时又 15 分钟（$\left[\frac{1710}{120}\right] = 14$）

羊跑 19 小时。（$\frac{1710}{90} = 19$）

也可用孙子定理求解：

$$M = 25 \times 8 \times 9 = 1800$$

$$M_1 \quad 8 \times 9 = 72, M_2 = 25 \times 9 = 225, M_3 = 25 \times 8 = 200$$

$$72M'_1 \equiv 10(mod 25) \Rightarrow M'_1 \equiv 5(mod 25)$$

$$225M'_2 \equiv 6(mod 8) \Rightarrow M'_2 \equiv 6(mod 8)$$

$$200M'_3 \equiv 0(mod 9) \Rightarrow M'_3 \equiv 0(mod 9)$$

$$\therefore x = 72 \times 5 + 225 \times 6 \quad 1710(mod 1800)$$

第五章

本章题解，有一部分只将解给出，让演解过程留给读者自己去做。

1. 解：用第一节的方法，本题得到三组解：

$$\begin{cases} x \equiv \pm 1(mod 7) \\ y \equiv 6(mod 7) \end{cases} \qquad \begin{cases} x \equiv \pm 2(mod 7) \\ y \equiv 3(mod 7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv \pm 3 \pmod{7} \\ y \equiv 5 \pmod{7} \end{cases} \qquad z = \frac{x^4 + y^5}{7}$$

2. 解：用第二节的方法。由于取 $x < 7$ 时，逐一代入原式得到 y 无解，故本题无解【除了 o 和含有 p【即方程右端系数 7】的倍数以外的整数解，下同】

3. 解：用第一节解方程(3)的方法，当 $x = 1, 2, 4$ 时，逐一代入原式并换算为同余式后，借助查素数的元根指数表，得到同余式无解，又当 $x = 3, 5, 6$ 时，同样方法得到同余式的解为：$y \equiv \pm 1, \pm 2, \pm 3 \pmod{7}$，故本题得到唯一组解：

$$\begin{cases} x \equiv 3, 5, 6 \pmod{7} \\ y \equiv \pm 1, \pm 2, \pm 3 \pmod{7} \end{cases} \qquad z = \frac{x^3 + y^6}{7}$$

4. 解：用同样方法，本题可得 6 组解的表示式：

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{7} \\ y \equiv 6 \pmod{7} \end{cases} \qquad \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{7} \\ y \equiv 3 \pmod{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{7} \\ y \equiv 2 \pmod{7} \end{cases} \qquad \begin{cases} x \equiv 4 \pmod{7} \\ y \equiv 5 \pmod{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{7} \\ y \equiv 4 \pmod{7} \end{cases} \qquad \begin{cases} x \equiv 6 \pmod{7} \\ y \equiv 1 \pmod{7} \end{cases}$$

$$z = \frac{x^5 + y^7}{7}$$

5. 解：用第二节的方法。由于 $x < 7$ 时，逐一代入原式得到 y 无解，故本题无解。

6、7、8 题，因 x 和 y 的幂都是偶数，当右端系数都等于 7 时，得到同 5 题的情况，故无解。

9. 本题右端系数的因数是 3 和 7，由于 $x^4 + y^4 = 7z$ 时无解，从而本题也无解。

10. 解：用第三节的方法，即：

取 $x = 1$ 代入原式并换算为同余式得到：

$$y^3 \equiv -1 \equiv 14(mod15) \Rightarrow \begin{cases} y^3 \equiv 14 \equiv 2(mod3) \Rightarrow y \equiv 2(mod3) \\ y^3 \equiv 14 \equiv 4(mod5) \Rightarrow y \equiv 4(mod5) \end{cases}$$

由孙子定理得 $y \equiv 14(mod15)$

取 $x = 2$ 代入原式并换算为同余式得到：

$$y^3 \equiv -4 \equiv 11(mod15) \Rightarrow \begin{cases} y^3 \equiv 11 \equiv 2(mod3) \Rightarrow y \equiv 2(mod3) \\ y^3 \equiv 11 \equiv 1(mod5) \Rightarrow y \equiv 1(mod5) \end{cases}$$

由孙子定理得 $y \equiv 11(mod15)$

取 $x = 3$ 代入原式并换算为同余式得到

$$y^3 \equiv -9 \equiv 6(mod15) \Rightarrow \begin{cases} y^3 \equiv 6 \equiv 0(mod3) \Rightarrow y \equiv 0(mod3) \\ y^3 \equiv 6 \equiv 1(mod5) \Rightarrow y \equiv 1(mod5) \end{cases}$$

由孙子定理得 $y \equiv 6(mod15)$

取 $x = 4$ 代入原式并换算为同余式得到：

$$y^3 \equiv -16 \equiv 14(mod15) \Rightarrow y \equiv 14(mod15)$$

取 $x = 5$ 代入原式并换算为同余式得到：

$$y^3 \equiv -25 \equiv 5(mod15) \Rightarrow \begin{cases} y^3 \equiv 5 \equiv 2(mod3) \Rightarrow y \equiv 2(mod3) \\ y^3 \equiv 5 \equiv 0(mod5) \Rightarrow y \equiv 0(mod5) \end{cases}$$

由孙子定理得 $y \equiv 5(mod15)$

取 $x = 6$ 代入原式并换算为同余式得到：

$$y^3 \equiv -36 \equiv 9(mod15) \Rightarrow \begin{cases} y^3 \equiv 9 \equiv 0(mod3) \Rightarrow y \equiv 0(mod3) \\ y^3 \equiv 9 \equiv 4(mod5) \Rightarrow y \equiv 4(mod5) \end{cases}$$

由孙子定理得 $y \equiv 9(mod15)$

取 $x = 7$ 代入原式并换算为同余式得到：

$$y^3 \equiv -49 \equiv 11(mod15) \Rightarrow y \equiv 11(mod15)$$

取 $x = 8$ 代入原式并换算为同余式得到：

$$y^3 \equiv -64 \equiv 11(mod15) \Rightarrow y \equiv 11(mod15)$$

取 $x = 9$ 代入原式并换算为同余式得到：

$$y^3 \equiv -81 \equiv 9(mod15) \Rightarrow y \equiv 9(mod15)$$

取 $x = 10$ 代入原式并换算为同余式得到：

$$y^3 \equiv -100 \equiv 5(mod15) \Rightarrow \begin{cases} y^3 \equiv 5 \equiv 2(mod3) \Rightarrow y \equiv 2(mod3) \\ y^3 \equiv 5 \equiv 0(mod5) \Rightarrow y \equiv 0(mod5) \end{cases}$$

由孙子定理得到 $y\equiv5(mod15)$

取 $x=11$ 代入原式并换算为同余式得到

$$y^3=121\equiv14(mod15)\Rightarrow y\equiv14(mod15)$$

取 $x=12$ 代入原式并换算为同余式得到

$$y^3=144\equiv6(mod15)\Rightarrow y\equiv6(mod15)$$

取 $x=13$ 代入原式并换算为同余式得到

$$y^3=169\equiv11(mod15)\Rightarrow y\equiv11(mod15)$$

取 $x=14$ 代入原式并换算为同余式得到

$$y^3=196\equiv14(mod15)\Rightarrow y\equiv14(mod15)$$

由上得到本题共有 5 组解的表示式：

$$\begin{cases}x\equiv\pm1,\pm4(mod15)\\y\equiv14(mod15)\end{cases}\qquad\begin{cases}x\equiv\pm2,\pm7(mod15)\\y\equiv11(mod15)\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\equiv\pm3(mod15)\\y\equiv6(mod15)\end{cases}\qquad\begin{cases}x\equiv\pm5(mod15)\\y\equiv5(mod15)\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\equiv\pm6(mod15)\\y\equiv9(mod15)\end{cases}\qquad z=\frac{x^2+y^3}{15}$$

11. 解：本题即第四章习题 3，在第四章的题解是用“奇偶数演算法”，本章则将它换成：

$$x^3-y^2=2z \tag{11'}$$

式，然后用同(1)题的方法去演解，因为转换后的方程的诸解中，若有 $z=1,x=x_0,y=y_0$ 时，则这 x_0 和 y_0 就是原题【即未换成前】的解，不然的话，原题就没有整数解，现演算如下：

取 $y=1$ 代入上式并换算为同余式得到：

$$x^3\equiv1(mod2)\Rightarrow x\equiv1(mod2)$$

故(11′)式的解有唯一表示式，即：

$$\begin{cases}x\equiv1(mod2)\\y\equiv1(mod2)\\z=\dfrac{x^3-y^2}{2}\end{cases}$$

因原题右端"2"是正整数，左端 y^2 是个平方数，故知 x 也必是个正整数，因此将(11′)式的非负解造表如下，其中 t 和 v 是通过 $z=\frac{x^3-y^2}{2}$【z 是整数】的整数。

$x=1+2t$	$y=1+2v$	$z=\frac{x^3-y^2}{2}$
1	1	0
3	5	1
	3	9
	1	13
5	11	2
	9	22
…	…	…

【其余略】

故原题的解为 $x=3$　$y=5$

第六章

1. 解：(1) 由本章第二节的引理，(1) 式一切正整数解的表示为：

$$x=kv,\quad y=\frac{(kv)^3-b^2}{2b},\quad z=\frac{(kv)^3+b^2}{2b}。$$

我们按这个引理并结合本题已知 $x=12$ 去探求 b 的取值，因为 $12=2^2\times3$，故可令 $b=2^t\times3^c$，其中 t 和 c 是 $0,1,2,3,\cdots$，t 和 c 可以相等，也可以交换，但 b 必须等于偶数和 $b<12^{\frac{3}{2}}$，为此，b 值有：$2,2^2=4,2^3=8,2^4=16,2^5=32$，$b\neq2^6$【因为 $2^6>12^{\frac{3}{2}}$】$2\times3=6,2^2\times3=12,2^3\times3=24$，$b\neq2^4\times3$【因为 $48>12^{\frac{3}{2}}$】$2\times3^2=18$，$b\neq2\times3^3$【因为 $54>12^{\frac{3}{2}}$】，$3^2\times2^2=36$。

将 b 值分别代入以上解的表示式得到：

以 $b=2$,得到:

$$x=12,\quad y_1=431,\quad z_1=433$$

以 $b=4$,得到:

$$x=12,\quad y_2=214,\quad z_2=218$$

以 $b=8$,得到:

$$x=12,\quad y_3=104,\quad z_3=112$$

以 $b=16$,得到:

$$x=12,\quad y_4=46,\quad z_4=62$$

以 $b=32$,得到:

$$x=12,\quad y_5=11,\quad z_5=43$$

以 $b=6$,得到:

$$x=12,\quad y_6=141,\quad z_6=147$$

以 $b=12$,得到:

$$x=12,\quad y_7=66,\quad z_7=78$$

以 $b=24$,得到:

$$x=12,\quad y_8=24,\quad z_8=48$$

以 $b=18$,得到:

$$x=12,\quad y_9=39,\quad z_9=57$$

以 $b=36$,得到:

$$x=12,\quad y_{10}=6,\quad z_{10}=42$$

故本题,当 $x=12$ 时,y 和 z 各有 10 个解,如上。

另有较易的解法:

由原式有:

$$12^3=z^2-y^2=(z+y)(z-y)$$

经计算 $12^3=1728$

将 1728 分为二个因数,即 $1728=ab$,把所有同是偶数的 a 和 b 算出来,即:

$1728=2\times 864=4\times 432=6\times 288=8\times 216=12\times 144$

$= 16 \times 108 = 18 \times 96 = 24 \times 72 = 32 \times 54 = 36 \times 48$

取 $a = x + y$ 为大数，$b = x - y$ 为小数，再由“和差数”方法，就可求出 x 和 y，例如，$864 = x + y$，$2 = x - y$，便可得到

$x = \dfrac{864 + 2}{2} = 433$，$y = \dfrac{864 - 2}{2} = 431$，仿此逐个演算，就可得到上面 10 个解。

(2) 将原式移项为：

$$x^3 = z^2 - (y^2)^2 \quad ②$$

由本章第二节公式(8)和以上②式，我们有：

$$x = kv, \quad z = \frac{(kv)^3 + b^2}{2b}, \quad y^2 = \frac{(kv)^3 - b^2}{2b} \quad ③$$

依题意要求，已知 $z = 45$，将它代入③得：

$$45 = \frac{(kv)^3 + b^2}{2b}, \quad y^2 = \frac{(kv)^3 - b^2}{2b} \quad ④$$

按照 b 是 $(kv)^3$ 的一个因数，$(kv)^{\frac{3}{2}} > b$ 的条件，得到 b 的取值是：$b = v, v^2, v^3, vk, v^2k, v^3k$。以 $b = v, v^2, \cdots$ 逐一代入④式演算。若 $b = v$，代入④整理得：

$$\left.\begin{aligned} &45 = \frac{v(k^3v + 1)}{2} \Rightarrow 90 = v(k^3v + 1) \\ &y^2 = \frac{v(k^3v - 1)}{2} \end{aligned}\right\} \quad ⑤$$

将 90 进行标准分解后，容易得到：

$$90 = 1 \times 90 = 2 \times 45 = 3 \times 30 = 5 \times 18 = 6 \times 15 = 9 \times 10 \quad ⑥$$

再将⑥式逐一代入⑤式演算，即：

$v(k^3v + 1) = 1 \times 90$，当 $v = 1$ 时，则 $k^3 + 1 = 90 \Rightarrow k^3 = 89$，无解。

$v(k^3v + 1) = 2 \times 45$，当 $v = 2$ 时，则 $2k^3 + 1 = 45 \Rightarrow k^3 = 22$，无解。

$v(k^3v + 1) = 3 \times 30$，当 $v = 3$ 时，则 $3k^3 + 1 = 30 \Rightarrow 3k^3 = 29$，

无解。

$v(k^3v+1)=5\times18$，当 $v=5$ 时，则 $5k^3+1=18\Rightarrow5k^3=17$，无解。

$v(k^3v+1)=6\times15$，当 $v=6$ 时，则 $6k^3+1=15\Rightarrow6k^3=14$，无解。

$v(k^3v+1)=9\times10$，当 $v=9$ 时，则 $9k^3+1=10\Rightarrow k=1$，以 $v=9,k=1$ 代入⑤式之2，得到：

$$y^2=\frac{9(9-1)}{2}=36,\quad\therefore\quad y=6$$

若 $b=v^2$，仿同样方法，k 和 v 没有通过⑤式的整数，

若 $b=v^3$，代入④整理得：

$$\left.\begin{aligned}&90=k^3+v^3\\&y^2=\frac{k^3-v^3}{2}\end{aligned}\right\}\qquad⑦$$

由⑦式之1得知 k 和 v 同奇偶，如取同偶，因 $6^3>90$，得到不论是 k 或 v，都只能小于6，即 $k,v\leqslant4$，如取 $k=4,2$，分别代入⑦之1验算有：$90-4^3=26$，而26不等于一个整数的三次方数，又 $90-2^3=82$，而82也不等于一个整数的三次方数，故 k 和 v 取同偶时无解，【也可用第四章“奇偶数演算法”设 $k=2m,v=2n$ 代入得到 $90=8(m^3+n^3)$，$\because 8\nmid90$，$\therefore$ 无解】。在⑦式之1中，如取同奇，因 $5^3>90$，同上理，k 或 v 取值范围为3，1，分别代入⑦之1验算有：$90-3^3=63$，而63不等于一个整数的三次方数，又 $90-1=89$，而89不等于一个整数的三次方数，从而得知④式中，取 $b=v^3$ 时无解。

若 $b=vk$，代入④式得到：

$$\left.\begin{aligned}&90=vk(vk+1)\\&y^2=\frac{vk(vk-1)}{2}\end{aligned}\right\}\qquad⑧$$

由⑧式之1观察，容易得知，它的右端等于二个连续数之积，而 $90=9\times10$，故知 $kv=9$，以 $kv=9$ 代入⑧式之2，得到 $y^2=$

$\frac{9(9-1)}{2}$,∴ $y=6$

若 $b=v^2k$,代入④式得到:

$$\left.\begin{aligned}90&=vk(k+v)\\ y^2&=\frac{vk(k-v)}{2}\end{aligned}\right\} \qquad ⑨$$

在⑨之1中,因 $90=1\times90=2\times45=3\times30=5\times18=6\times15=9\times10$,故有 $vk(k+v)=1\times90=2\times45=3\times30=5\times18=6\times15=9\times10$ 将它们逐一代入验算,唯有当 $vk=9$,$k+v=10$,时,则得到 $k=9$,$v=1$,这和前面的解相同。

若 $b=v^3k$ 代入④式得到:

$$\left.\begin{aligned}90&=k(k+v^3)\\ y^2&=\frac{k(k-v^3)}{2}\end{aligned}\right\} \qquad ⑩$$

在⑩之1中,仿照同样方法,有二个解:其一:$k=9$,$v=1$,其二,当 $k(k+v^3)=3\times30$ 时,有 $k=3$,$v=3$,以"其二"代入⑩式之2整理得到 $y^2=-36$,即 $y=6\sqrt{-1}$ 这不是实数,故本题有唯一整数解为 $x=9$,$y=6$。

2. 解:由本章第二节引理,将原式移项变形为:

$$x^2=3y^2+2zy+2y-z^2-2z-1 \qquad ⑪$$

将⑪式的右端进行分解得到:

$$x^2=(y+z+1)(3y-z-1) \qquad ⑫$$

令 $y+z+1=a$,$3y-z-1=b$ ⑬

由⑬式得到 $a+b=4y$,即 $a=4y-b$ ⑭

由⑫⑬⑭得到 $x^2=b(4y-b)$ ⑮

设 $x^2=k^2$ k 是整数

即 $k^2=b(4y-b)$,整理变形为:

$$y=\frac{k^2+b^2}{4b} \qquad ⑯$$

将⑯式代入⑬式，移项整理变形为：

$$z = \frac{3b^2 - k^2}{4b} - 1 \qquad ⑰$$

由以上得到本题整数解的表示式为：

$$x = k,\quad y = \frac{k^2 + b^2}{4b},\quad z = \frac{3b^2 - k^2}{4b} - 1 \qquad ⑱$$

其中 k 和 b 是整数，b 是 k^2 的因数，并由⑮式得知 b 和 k 同奇偶，而 b 的选值是通过表示式的整数。并由以下分析得知 k 不能取奇数：即

在⑮式中，容易得到，当 $k = b$ 时，即有 $4y = b + b$，移项约简为 $2y = b$，得到 $y = \frac{b}{2}$，再以 $y = \frac{b}{2}$ 代入⑬移项得到 $z = \frac{b}{2} - 1$。故可由⑮式得到原式有一组整数解由下式表示出来：

$$\left.\begin{aligned} x &= b \\ y &= \frac{b}{2} \\ z &= \frac{b}{2} - 1 \end{aligned}\right\} \qquad ⑲$$

这时容易知道，在⑲式中，只要 b 等于偶数就成了。故当取 x 等于偶数时，就可由⑲式得到原式的一组整数解，但它不是取 x 为偶数时一切整数解的表示式，也就是说，原式的一切整数解仍须由⑱表示。现再由⑱式试算如下：

取 $x = 1$ 时，z 和 y 不是整数

取 $x = 2$ 时，有 $b = 2$，得到 $y = 1, z = 0$

取 $x = 3$ 时，z 和 y 不是整数

取 $x = 4$ 时，有 $b = 4$，得到 $y = 2, z = 1$

取 $x = 5$ 时，z 和 y 不是整数

取 $x = 6$ 时，有 $b_1 = 6$，得到 $y = 3, z = 2$

$b_2 = 18$，得到 $y = 5, z = 12$

取 $x = 7$ 时，z 和 y 不是整数

取 $x = 8$ 时，有$b_1 = 8$，得到 $y = 4, z = 3$

$b_2 = 16$，得到 $y = 5, z = 10$

取 $x = 9$ 时，z 和 y 不是整数

取 $x = 10$ 时，有$b_1 = 10$，得到 $y = 5, z = 4$

$b_2 = 50$，得到 $y = 13, z = 36$

取 $x = 11$ 时，z 和 y 不是整数

取 $x = 12$ 时，有$b_1 = 12$，得到 $y = 6, z = 5$

$b_2 = 36$，得到 $y = 10, z = 25$

…………

【其余略】

由以上得到提示：本题的正整数解，x 不能取奇数，当 x 为大于 4 的偶数时，b 有二个值，小 b 等于 x，大 b 等于 x 的倍数中选择。

3. 解：将原式右边进行因式分解得：

$$x^3 = (y + 2z + 1)(y + z - 1) \quad ⑳$$

令 $y + 2z + 1 = a, \quad y + z - 1 = b$ ㉑

由 ㉑ 式得到 $a - b = z + 2$，即 $a = b + z + 2$ ㉒

由 ⑳㉑㉒ 得到：$x^3 = b(b + z + 2)$ ㉓

设 $x^3 = (kv)^3$ k 和 v 都是正整数

由 ㉓ 式和本章第二节引理，经过演算后，整理得到：

$$x = kv, \ y = \frac{b(2b + 3) - (kv)^3}{b}, \ z = \frac{(kv)^3 - b(b + 2)}{b} \quad ㉔$$

因为 b 是$(kv)^3$ 是一个因数，并由 ㉓ 式得知 $a > b$，从而得知 $(kv)^{\frac{3}{2}} > b$，故有 $b = v^i, kv^i, i = 1, 2, 3, \cdots$

以 $b = v$ 代入 ㉔ 式得到

$$x = kv, y = 2v + 3 - k^3v^2, z = k^3v^2 - (v + 2) \quad ㉕$$

在 ㉕ 式中，因 k 和 v 都是 0 以外的正整数，那么，如果 $k > v$，则 y 不是正整数，如果 $v = 3, k = 1$，则 $y = 0$，如果 $v > 3$，则 y 是负数。如果 $v = 2, k = 1$，则 z 等于0，故 ㉕ 式不符合原式正整数解

的要求，应舍去。

以 $b = v^2$ 代入㉔式得到

$$x = kv,\ y = 2v^2 + 3 - k^3v,\ z = k^3v - (v^2 + 2) \qquad ㉖$$

在㉖式中，如果 $k > v$，则 y 不是正整数，如 $k = 1$，则 z 等于负数，故有 $1 < k < v$，由试算得到提示，在㉖式中：

当 $k = 2$ 时，　有　$4 \leqslant v < 2^3$

$k = 3$ 时，　$14 \leqslant v < 3^3$

$k = 4$ 时，　$32 \leqslant v < 4^3$

$k = 5$ 时，　$63 \leqslant v < 5^3$

……………

以 $b = v^3$ 代入㉔式得到

$$x = kv,\ y = 2v^3 + 3 - k^3,\ z = k^3 - (v^3 + 2) \qquad ㉗$$

在㉗式中，由试算得到提示 $v > 3$，$k - v = 1$。

以 $b = kv$，……

【其余略】

验证　取 $k = 4$，$v = 35$ 代入㉖式得到：

$x = 4 \times 35 = 140$，　$y = 2 \times 35^2 + 3 - 4^3 \times 35 = 213$，

$z = 4^3 \times 35 - (35^2 + 2) = 1013$，

以 $x = 140$，$y = 213$，$z = 1013$ 代入原式得：

$$x^3 = 140^3 = 213^2 + 3 \times 1013 \times 213 + 2 \times 1013^2 - 1013 - 1 = 2744000$$

又取 $k = 5$，$v = 4$ 代入㉗式得到：

$x = 20$，$y = 2 \times 4^3 + 3 - 5^3 = 6$，$z = 5^3 - (4^3 + 2) = 59$

以 $x = 20$，$y = 6$，$z = 59$ 代入原式得：

$$x^3 = 20^3 = 6^2 + 3 \times 59 \times 6 + 2 \times 59^2 - 59 - 1 = 8000$$

以上二个验证，结果均满足原式，故㉖㉗式是原式正整数解表示式之一，而㉔式是原式一切正整数解的表示式。

4. 解：将原式分解为：

$$x^3 = y(y+50) \qquad ㉘$$

由㉘式我们知道 y 是 x^3 的一个因数，且 $y < x^{\frac{3}{2}}$，y 和 x 同奇偶。

先证明 x 和 y 都不是素数，如果 x 和 y 都是素数，则由㉘式得到 $x = y$，于是有 $y + 50 = y^2$，将它代入判别式得到 $\sqrt{1 + 4 \times 50} = \sqrt{201}$，显然得知 201 不等于一个整数的平方数，故 x 和 y 都不是素数，而是复合数。

设 $x = kv$，k 和 v 都是正整数，$k > v$，将它们代入原式并变形为：

$$50 = \frac{(kv)^3 - y^2}{y} \qquad ㉙$$

由本章第二节引理，我们得知 y 的选值范围有：

$$y = k(\text{或}\ v),\ k^2,\ kv,\ kv^2$$

以 $y = k$ 代入㉘式整理得到

$$50 = k(kv^3 - 1) \qquad ㉚$$

将㉚式左边分解为 $50 = 2 \times 25 = 5 \times 10$

因为 $k > v$ 和㉚式，故 k 的取值有 2 和 5，分别代入㉚式，都无整数解。

以 $y = k^2$ 代入㉘式整理得到

$$50 = k(v^3 - k) \qquad ㉛$$

以 $k = 2$ 代入㉛式得到 $v = 3$

以 $k = 25$ 代入㉛式得到 $v = 3$

以 $k = 5$ 和 $k = 10$ 代入㉛式都无正整数解。

以 $y = kv$ 代入㉙式整理得：

$$50 = kv(kv - 1) \qquad ㉜$$

因㉜式右端等于二个连续数之积，而左端 50 不等于二个连续数之积，故㉜式无整数解。

以 $y = kv^2$ 代入㉙式整理得：

$$50 = kv(k - v) \qquad ㉝$$

因 $k > v$ 和㉝式，故知 $kv > k - v$，以 $kv = 10$ 代入㉝式整理得 $(5 + v)v = 10$，将其代入判别式 $\sqrt{5^2 + 4 \times 10} = \sqrt{65}$，故无整数解。

由以上得知原式的正整数解有：

$$\begin{cases} x = kv = 2 \times 3 = 6 \\ y = k^2 = 2^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = kv = 25 \times 3 = 75 \\ y = k^2 = 25^2 = 625 \end{cases}$$

第七章

1. 解：在 $x^5 = y^2 + z^2$ 式中，已知 $x = a^2 + b^2$，当取 $a = 3$，$b = 2$ 时，得到 $x = 13$，将其代入

$$\frac{x^5 - 1}{4} = m^2 + n(n + 1)$$

即 $$\frac{13^5 - 1}{4} = 92823 = m^2 + n(n + 1)$$

查数学用表得到：【仿本章第一节中查表方法】

$$92823 = 299^2 + 58 \times 59$$

$$92823 = 169^2 + 253 \times 254$$

$$92823 = 61^2 + 298 \times 299$$

得到 $m_1 = 299, n_1 = 58$

$m_2 = 169, n_2 = 253$

$m_3 = 61, n_1 = 298$

故本题方程，当 $x = 13$ 时，有：

$$\begin{cases} y_1 = 2m_1 = 598 \\ z_1 = 2n_1 + 1 = 117 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2 = 2m_2 = 338 \\ z_2 = 2n_2 + 1 = 507 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_3 = 2m_3 = 122 \\ z_3 = 2m_3 + 1 = 597 \end{cases}$$

由本章第二节之(二),当方程为 $x^5 = y^2 + Z^2$ 时,解的表示式是:

$$x = a^2 + b^2$$

$$\begin{cases} y_1 = a(a^2 + b^2)^{\frac{n-1}{2}} \\ z_1 = b(a^2 + b^2)^{\frac{n-1}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = a(a^2 + 3b^2)(a^2 + b^2)^{\frac{n-3}{2}} \\ z_2 = b(3a^2 - b^2)(a^2 + b^2)^{\frac{n-3}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_3 = a(a^4 - 10a^2b^2 + 5b^4)(a^2 + b^2)^{\frac{n-5}{2}} \\ z_3 = b(5a^4 - 10a^2b^2 + b^4)(a^2 + b^2)^{\frac{n-5}{2}} \end{cases}$$

取 $a = 3, b = 2$ 代入上式整理得到:

$$x = 13$$

$$\begin{cases} y_1 = a(a^2 + b^2)^{\frac{5-1}{2}=2} = 507 \\ z_1 = b(a^2 + b^2)^2 = 338 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = a(a^2 - 3b^2)(a^2 + b^2)^{\frac{5-3}{2}=1} = -117 \\ z_2 = b(3a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = 598 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_3 = a(a^4 - 10a^2b^2 + 5b^4)(a^2 + b^2)^{\frac{5-5}{2}=0} = -597 \\ z_3 = b(5a^4 - 10a^2b^2 + b^4)(a^2 + b^2)^0 = 122 \end{cases}$$

验证　其中 y 和 z 有交换值或出现负数,但因原题中 y^2 和 z^2 都同是系数为 1 的平方数,故用本章第一节的方法得到的解和代入本章第二节之(二)的公式得到的解都是一致的。

2. 解:用本章第三节的"推算规律"将 $x^7 = y^2 + z^2$ 式中 y 和 z 解的表示式推算如下:

先将 $(a^2 + b^2)^7$ 由代数公式或由杨辉三角法展开得:

$a^{14}+7a^{12}b^2+21a^{10}b^4+35a^8b^6+35^6b^8+21a^4b^{10}+7a^2b^{12}+b^{14}$ ①

由“规律”第一条得到 $x=a^2+b^2$，由“规律”第三条第2款得到 y 和 z 第一个表示式为：

$$①\begin{cases} y_1=a(a^2+b^2)^{\frac{n-1}{2}=3} \\ z_1=b(a^2+b^2)^3 \end{cases}$$

由“规律”第三条第3款得到 y 和 z 第二个表示式为：【y_2 和 z_2 式中括号内首项和末项的系数分别是1和3】并列出形如：

$$\left.\begin{array}{l} y_2=a[a^6\pm(k_1)a^4b^2\pm(\quad)a^2b^4\pm3b^6] \\ z_2=b[3a^6\pm(\quad)a^4b^2\pm(\quad)a^2b^4\pm b^6] \end{array}\right\} \quad ②$$

先在 y_2 式中推算 k_1 值。

容易知道(1)式的第一项 a^{14}，已由(2)式中 y_2 的括符内首项自乘再乘括符外 a 的自乘给出，即 $a^2(a^6)^2=a^{14}$。现在要讨论②的 y_2 式中小括号内待定数 k_1，为了解决这 k_1，就要把(1)式中第二项 $7a^{12}b^2$ 和在 y_2 和 z_2 中找出含有“$a^{12}b^2$”的所有数来联系一起进行计算，先在 y_2 式中找得：首项数乘第二项数再乘括符外的 a，【a 要自乘成为 a^2】，即：

$$a^2\times a^6\times(\pm k_1)\times a^4b^2=\pm k_1a^{12}b^2$$

我们已知，表示式括符内的每一项，除了自乘外，还要分别去乘所有的每一项，这样我们就知道，首项乘次项，而次项又要倒回来乘首项，即互相对乘共二次。再在 z_2 式中找得：$(3a^6)^2$ 再乘括符外的 b【b 要自乘成为 b^2】，即

$$b^2\times(3a^6)^2=9a^{12}b^2$$

于是联系起来得到一个方程为：

$$9a^{12}b^2+2(\pm k_1)\times a^{12}b^2=7a^{12}b^2,$$

我们主要是计算出系数 k，故可将上式简为：

$$9+2(\pm k_1)=7$$

得到：$9+2(-1)=7$， $\therefore k_1=-1$

既然已得到 y_2 式第二项是"$-a^4b^2$",又由"规律"第二条第1款得知 z_2 式倒数第二项的系数和 y_2 式第二项系数相同【即互相倒排】,故得到:

$$\left.\begin{array}{l} y_2 = a[a^6 - a^4b^2 \pm (k_2)a^2b^4 \pm 3b^6] \\ z_2 = b[3a^6 \pm (k_2)a^4b^2 \pm a^2b^4 \pm b^6] \end{array}\right\} \quad ③$$

再推算③中的 k_2,这要把(1)式的第三项"$21a^{10}b^4$"和 y_2、z_2 式中含有 $a^{10}b^4$ 者联系起来计算。即在 y_2 式中找得:

$$a^2 \times a^6 \times (\pm k_2a^2b^4) = \pm k_2a^{10}b^4 \text{ 和 } a^2 \times (a^4b^2)^2 = a^{10}b^4;$$

在 z_2 式中找得:

$$b^2 \times 3a^6 \times (\pm k_2)a^4b^2 = 3(\pm k_2)a^{10}b^4.$$

于是得到一个方程为:

$$[2(\pm k_2a^{10}b^4) + a^{10}b^4] + [2(\pm 3k_2a^{10}b^4)] = 21a^{10}b^4$$

简为:$[2(\pm k_2) + 1] + [2(\pm 3k_2)] = 21$

再整理得:$2(\pm k_2) + 2(\pm 3k_2) = 20$

容易得知,上式左边二项,不能都是正数或都是负数,因为 $8 \neq 20$。又因为 $|6| > |2|$,故唯有取前项为负,后项为正,得到:$k_2 = 5$,

故有:

$$\left.\begin{array}{l} y_2 = a(a^6 - a^4b^2 - 5a^2b^4 \pm 3b^6) \\ z_2 = b(3a^6 + 5a^4b^2 \pm a^2b^4 \pm b^6) \end{array}\right\} \quad (4)$$

现在剩下来的是如何确定表示式中最后2项系数前的正负号。

同上理,再把①式第三项"$35a^8b^6$"来联系推算,先在④式的 y_2 中找得:

$$a^2 \times a^6(\pm 3b^6) = \pm 3a^8b^6 \text{ 和 } a^2 \times (-a^4b^2) \times (-5a^2b^4) = 5a^8b^6;$$

又再在 z_2 式中找得:

$$b^2(5a^4b^2)^2 = 25a^8b^6 \text{ 和 } b^2 \times 3a^6 \times (\pm a^2b^4) = \pm 3a^8b^6$$

于是得到又一方程为：

$$[2(\pm 3a^6b^6)+2(5a^6b^6)]+[25a^6b^6+2(\pm 3a^6b^6)]=35a^6b^6$$

简为：$[2(\pm 3)+10]+[25+2(\pm 3)]=35$

再整理得：$[2(\pm 3)]+[2(\pm 3)]=0$

上式容易得到：

左边前项如取正号，则后项取负号，

左边前项如取负号，则后项取正号，

【前项是①式中 y_2 式的最后项，后项是④式中 z_2 式倒数第二项】

故得到二种情况：

$$\left.\begin{aligned} y_2 &= a(a^6 - a^4b^2 - 5a^2b^4 + 3b^6) \\ z_2 &= b(3a^6 + 5a^4b^2 - a^2b^4 \pm b^6) \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

或

$$\left.\begin{aligned} y_2 &= a(a^6 - a^4b^2 - 5a^2b^4 - 3b^6) \\ z_2 &= b(3a^6 + 5a^4b^2 + a^2b^4 \pm b^6) \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

(a)、(b) 二式中，只有一式是正确的，并要继续仿上演算决定。因此，再讨论①式的第五项"$35a^6b^8$"。

先在 (a) 式的 y_2 中找得：

$$a^2\times(-a^4b^2)(3b^6)=-3a^6b^8 \text{ 和 } a^2\times(-5a^2b^4)^2=25a^6b^8;$$

又再在 (a) 式的 z_2 中找得：

$$b^2\times 5a^4b^2\times(-a^2b^4)=-5a^6b^8 \text{ 和 } b^2\times 3a^6(\pm b^6)=\pm 3a^6b^8$$

于是又得到一方程为：

$$[2(-3a^6b^8)+25a^6b^8]+[2(-5a^6b^8)\pm 2\times(3a^6b^8)]=35a^6b^8$$

简为：$[2(-3)+25]+[2(-5)-2(\pm 3)]=35$

即 $2(-3)+[2(-5)+2(\pm 3)]=10$

即 $2(-3)+2(\pm 3)]=20$

上式二边并不相等，应舍去。

再在 (b) 式的 y_2 中找得：

$$a^2(-5a^2b^4)^2=25a^6b^8 \text{ 和 } a^2(-a^4b^2)(-3b^6)=3a^6b^8$$

又在(b)式的z_2中找得：

$$b^2\times 3a^6(\pm b^6)=\pm 3a^6b^8 \text{ 和 } b^2\times 5a^4b^2\times a^2b^4=5a^6b^8$$

于是又得到一方程为：

$$[25a^6b^8+2(3a^6b^8)]+[2(\pm 3a^6b^8)+2(5a^6b^8)]=35a^6b^8$$

简为：

$$[25+2(3)]+[2(\pm 3)+2(5)]=35$$

整理得：$2(3)+2(\pm 3)=0$

$\therefore 2(3)+2(-3)=0$

即取(b)式中z_2式末项符号为负，从而得到：

z_2和y_2的表示式为：

$$②\begin{cases} y_2=a(a^6-a^4b^2-5a^2b^4-3b^6) \\ \quad =a(a^2-3b^2)(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}-\frac{3}{2}=2} \\ z_2=b(3a^6+5a^4b^2+a^2b^4-b^6) \\ \quad =b(3a^2-b^2)(a^2+b^2)^2 \end{cases}$$

同理，运用“规律”可以再推出【略】：

$$③\begin{cases} y_3=a(a^6-9a^4b^2-5a^2b^4+5b^6) \\ \quad =a(a^4-10a^2b^2+5b^4)(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}-\frac{5}{2}=1} \\ z_3=b(5a^6-5a^4b^2-9a^2b^4+b^6) \\ \quad =b(5a^4-10a^2b^2+b^4)(a^2+b^2) \end{cases}$$

$$④\begin{cases} y_4=a(a^6-21a^4b^2+35a^2b^4-7b^6)(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}-\frac{7}{2}=0} \\ z_4=b(7a^6-35a^4b^2+21a^2b^4-b^6)(a^2+b^2)^0 \end{cases}$$

最后得到$x^7=y^2+z^2$式的一切解的表示式为：$x=a^2+b^2$，y和z的表示式见以上①、②、③、④式，其中a和b是任意整数。

3. 解：原式 $x^6=y^2+z^2$ ⑤

依题意已知 $x^4=y^2+z^2$ ⑥

式解的表示式是：

$$\left.\begin{array}{l} x = a^2 + b^2 \\ \left\{\begin{array}{l} y_1 = 2ab(a^2 + b^2) \\ z_1 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} y_2 = 2(2ab)(a^2 - b^2) \\ z_2 = (2ab)^2 - (a^2 - b^2)^2 \end{array}\right. \end{array}\right\} \quad ⑦$$

由于 ⑤ 式中 $x^6 = x^{6-4+2}$,而"2"等于 ⑥ 式右端的方次数,由本章的《引理 C》,只须将 ⑥ 式的解 ⑦ 式分别再乘以 x 的解,即$(a^2 + b^2)$,就可以得到 ⑤) 式中 y 和 z 第一、二个表示式为:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = 2ab(a^2 + b^2)^2 \\ z_1 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)^2 \end{array}\right\} \quad ⑧$$

$$\left.\begin{array}{l} y_2 = 2(2ab)(a^2 - b^2)(a^2 + b^2) \\ z_2 = [(2ab)^2 - (a^2 - b^2)^2](a^2 + b^2) \end{array}\right\} \quad ⑨$$

又因为同一个 x 值有 $U = \frac{n}{2} = \frac{6}{2} = 3$ 个 y 和 z 的表示式,故 ⑤ 式中 y 和 z 第三个表示式,再由勾股定理和 $n = 3$ 时 y 和 z 的第二个表示式通过演算给出,即:

将 ⑤ 式改写成$(x^3)^2 = y^2 + z^2$,由勾股定理得到

$$x^3 = c^2 + d^2,\ y = 2cd,\ z = c^2 - d^2 \quad ⑩$$

已知 ⑩ 式中第一式 $x^3 = c^2 + d^2$ 解的表示式是:

$$x = a^2 + b^2,\ c = a(a^2 - 3b^2),\ d = b(3a^2 - b^2) \quad ⑪$$

把 ⑪ 式代入 ⑩ 式得到:

$$\left.\begin{array}{l} y_3 = 2ab(a^2 - 3b^2)(3a^2 - b^2) \\ z_3 = [a(a^2 - 3b^2)]^2 - [b(3a^2 - b^2)]^2 \end{array}\right\} \quad ⑫$$

因此得到 ⑤ 式即原式解 y 和 z 三个表示式就是以上 ⑧⑨⑫ 式。

4. 解:在 $x^9 = y^2 + z^2$ 式中,先算出 $x^9 = 3^9 = 19683$,
再列出:$19683 = 1 \times 19683 = 3 \times 6565 = 9 \times 2187 = 27 \times 729$
$= 81 \times 243$ ⑬

又把原式右端分解得：$x^9 = (y+z)(y-z)$　　⑭

把⑬逐一代入⑭去演算，即：

(1) $x^9 = (19683+1)(19683-1)$

用“和差数”得到　$y = \dfrac{19683+1}{2} = 9842$，

$$z = \frac{19683-1}{2} = 9841,$$

(2) $x^9 = (6561+3)(6561-3)$

得到　$y = \dfrac{6561+3}{2} = 3282$，

$$z = \frac{6561-3}{2} = 3279,$$

把由题已知的：$y = 3282$，$z = 3279$ 和以上的(1)、(2)对照，恰好是第 2 条，它的解的值，由小到大，属第四，再翻阅本章第四节，n 是奇数时的表示式，其解的值也由小到大，即第 4 个：

$x = a^2 - b^2$，

$$\left.\begin{aligned} y_4 &= a(a^6+21a^4b^2+35a^2b^4+7b^6) - (a^2-b^2)^{\frac{9-7}{2}-1} \\ z_4 &= b(7a^6+35a^4b^2+21a^2b^4+b^6)(a^2-b^2) \end{aligned}\right\} ⑮$$

验证：以 $a=2$，$b=1$ 代入⑮得到：

$x = 2^2 - 1^2 = 3$

$y_4 = 2(2^6+21\times2^4+35\times2^2+7)(2^2-1) = 3282$

$z_4 = 1(7\times2^6+35\times2^4+21\times2^2+1)(2^2-1) = 3279$

验证无误，故 3282 和 3279 可由⑮式给出。

第八章

1. 解：原式：$x^5 = y^3 + z^3$　　①

因为①式中 x^5，其中 $5-3=2$【指方程中的方次数】故原方程可转为先求：

$x^2 = y^3 + z^3$ ②

式解的表示式。

由于容易得到"$x = a^3 + b^3, y = a, z = b$"是满足方程：

$x = y^3 + z^3$ ③

式的一个解，故又要转为求

$x^4 = y^3 + z^3$ ④

式解的表示式。

由第七章第三节末后的《引理C》和③式的解，得知④式的解有：$x = a^3 + b^3, y = a(a^3 + b^3), z = b(a^3 + b^3)$，把②④式对照，显然得到②式的解为：

$x = (a^3 + b^3)^2, y = a(a^3 + b^3), z = b(a^3 + b^3)$。

再将①式写成：$x^{5=1\times 3+2} = y^3 + z^3$

再由《引理C》和②式的解，于是可得到①式的解为：

$x = (a^3 + b^3)^2, y = a(a^3 + b^3)^{1+2=3}, z = b(a^3 + b^3)^3$

注：由第六章第二节《引理A》可将①式解的表示式再演化如下：

$$x = \frac{(a^3 + b^3)^2}{M^3}, \quad y = \frac{a(a^3 + b^3)^3}{M^5}, \quad z = \frac{b(a^3 + b^3)^3}{M^5}$$

其中a、b、M是正整数，但要有通过的值，例如：取$a = 2, b = 1$，则$M = 3$，代入上式整理得到①式解的最小正整数：$x = 3, y = 6, z = 3$，

故$x = 3M^3, y = 6M^5, z = 3M^5$也是①式一个解。

如再取$a = 4, b = 2$，则$M = 2, 3, 4, 6, 12$。

其余仿此。

2. 解：将本题和第1题对照，可知只须将第1题解x的表示式$(a^3 + b^3)^2$，改为$(a^3 + b^3)$，至于y和z的表示式则不变，即：

$x = a^3 + b^3, \ y = a(a^3 + b^3)^3, \ z = b(a^3 + b^3)^3$。

【也可用本章第五节第一，即由$x^{3k+1=10}$得到$k = 3$，直接得出它的

解的表示式。】

第九章

1. 解：因原式左端 x^{13}，可写成 $x^{13=4\times3+1}$，故由本章第四节第一条 x^{4k+1} 中有 $4k+1-13$，得到 $k-3$，从而得到原式的解的表示式是：

$x=a^4+b^4,\ y=a(a^4+b^4)^{k=3},\ z-b(a^4+b^4)^{k=3}$

2. 解：因原式左端 x^7，可写成 $x^{7=4+3}$，故由本章第四节第二条 x^{4k+3} 中有 $4k+3-7$，得到 $k-1$，从而得到原式的解的表示式是：

$x(a^4\quad b^4)^3, y-a(a^4-b^4)^{2+3k=5}, z-b(a^4-b^4)^{2+3k=5}$。

以上二题，其中 a 和 b 是整数，$a\neq b$。

第十一章

一、判断

(1) 因(20,5) — 5 > 1，故(1) 式无非零整数解；

(2) 因(14,6) — 2 > 1，故(2) 式无非零整数解；

(3) 因(11,3) — 1，故(3) 有非零整数解。它的解可由第八章第五节，第二条：x^{3k+2} 中有 $3k+2=11$，得到 $k=3$，从而得到(3)式的解的表示式是：

$x-(a^3+b^3)^2,\ y-a(a^3+b^3)^{1+2k=7}$，

$z=b(a^3+b^3)^{1+2k=7}$。其中 a 和 b 是整数。

二、(1) 解：由原式有 24 > 5，故可用本章例二的方法：即由 $n=tm+r\Rightarrow24=4\times5+4$，(即 $t-4, r-4$) 转为求新方程

$x^{r=4}-y^5+z^5$ 的解的表示式。

由 $vm+1-rw\Rightarrow5v+1=4w$【即 $v-3, w=4$】得到新方程的解的表示式为：

$x = (a^5 + b^5)^{w=4}$，$y = a(a^5 + b^5)^{v=3}$，$z = b(a^5 + b^5)^{v=3}$。

然后再求原方程 $x^{24=4\times5+4} = y^5 + z^5$ 的解的表示式，即：

$x = (a^5 + b^5)^{w=4}$，$y = a(a^5 + b^5)^{tw+v=4\times4+3=19}$，

$z = b(a^5 + b^5)^{tw+v=4\times4+3=19}$。

【也可直接由第十章之四得到 $x^{5k+4=24} = y^5 + z^5$ 的解的表示式为：$x = (a^5 + b^5)^4$，$y = a(a^5 + b^5)^{3+4k=19}$，

$z = b(a^5 + b^5)^{3+4k=19}$】。

(2) 解：由原式有 $5 < 6$，故可用本章例一的方法，即由 $vm + 1 = nw \Rightarrow 6v + 1 = 5w$【计算得 $v = 4, w = 5$】得到原式的解的表示式为：$x = (a^6 + b^6)^{w=5}$，$y = a(a^6 + b^6)^{v=4}$，$z = b(a^6 + b^6)^{v=4}$。

三、证：将原式改写成：

$(x^2)^3 = y^4 + z^4$ ②

【如果写成$(x^3)^2 = y^4 + z^4$，则根据第九章第二节的讨论也得到 $x^2 = y^4 + z^4$ 没有整数解，从而原式无解。】

由第九章第四节二的表示式和②，我们有：

$x^2 = (a^4 + b^4)^3$，$y = a(a^4 + b^4)^2$，$z = b(a^4 + b^4)^2$ ③

于是知道②式有解的条件是③式有通过的 a、b 整数。因此，先要证明③式中的第一式，即 $x^2 = (a^4 + b^4)^3$ 有否整数解。

在 $x^2 = (a^4 + b^4)^3$ ④

式中，令 $a^4 + b^4 = M$ 代入④式得到：

$x^2 = M^3$

由第三章第一节的表示式和⑤式，我们有

$x = k^3$，$M = k^2$ 【以上 k 和 M 都是整数】 ⑥

将⑥代入④整理得：$k^2 = a^4 + b^4$ ⑦

由第九章第二节的讨论得知⑦式无整数解，故知原式没有整数解。【也可用第十二章的结论，由于$(n,m) = (6,4) = 2 > 1$，得到原式无解】

四、解：【本题中称“解”均指正整数解】将原式移项并改写成：

$$y^3 = x^2 - (z^2)^2 \quad ⑧$$

由第七章第四节公式得到 ⑧ 式解的表示式有二，即：

(一) $y = a^2 \ \ b^2 \quad x = a(a^2 \ \ b^2) \quad z^2 = b(a^2 - b^2)$

(二) $y = a^2 \ \ b^2 \quad x = a(a^2 + 3b^2) \quad z^2 = b(3a^2 + b^2)$

其中 $a > b$　a 和 b 是正整数，以下所引用的 $v, k, \cdots$ 都是正整数。

由此得知 ① 式（即原式）的解可转为（一）（二）的解，而（一）（二）的解实质是 $z^2 = b(a^2 - b^2)$ 和 $z^2 = b(3a^2 + b^2)$ 的解。分别讨论如下：

一、先讨论 $z^2 = b(a^2 \ \ b^2)$　⑨

设 $z = vk$　代入 ⑨ 式得：

$$v^2k^2 = b(a^2 \ \ b^2) \quad ⑩$$

⑩ 式中有 $b < a^2 - b^2$

$\because a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

又由于 $a > b$，即 $a - b > 0$

$\therefore a^2 \ \ b^2 = (a + b)(a - b) > a > b$

由第六章第二节的讨论，在 ⑩ 式中，b 是 v^2k^2 的一个因数和 $b < a^2 - b^2$，因此 ⑩ 式有：

$b = v, v^2, b \neq vk, vk^2.$

（一）若 $b = v$，代入 ⑩ 式整理移项得：

$$a^2 = v(k^2 + v) \quad ⑪$$

同样方法，设 $a = v_1k_1$，则有 $v = v_1, v_1{}^2, v \neq v_1k_1, v_1k_1^2$。

A、若 $v = v_1$ 代入 ⑪ 式整理移项得：

$$k^2 = v_1(k_1^2 \ \ 1) \quad ⑫$$

又同样方法，设 $k = v_2k_2$ 代入 ⑫ 式得：

$$v_2^2k_2^2 = v_1(k_1^2 - 1) \quad ⑬$$

则有：$v_1 = v_2, v_2^2, v_2k_2, v_2k_2^2$

1. 若 $v_1 = v_2$ 代入 ⑬ 式整理移项得：

$v_2k_2^2 = k_1^2 - 1$ ⑭

由⑭ $\Rightarrow v_2k_2^2 = (k_1+1)(k_1-1)$

(a) 令 $k_1+1 = k_2^2$，$k_1 - 1 = v_2 \Rightarrow k_1 = v_2 + 1 = 1 + v_1$

$\because k_2^2 = k_1 + 1 = (1+v_1) + 1 = 2 + v_1$ 即 $v_1 = k_2^2 - 2$ 和 v_1 是正整数，$\therefore k_2 > 1$，于是得到：

$$\begin{cases} z = vk = v_1v_2k_2 = v_2^2k_2 = (k_1-1)^2k_2 = (k_2^2-2)^2k_2 \\ a = v_1k_1 = (k_2^2-2)(k_2^2-1) \\ b = v = v_1 = k_2^2 - 2 \end{cases}$$ 其中 $k_2 > 1$，

(b) 令 $k_1 + 1 = v_2$，$k_1 - 1 = k_2^2$

于是得到：

$$\begin{cases} z = vk = v_2^2k_2 = (k_1+1)^2k_2 \\ a = v_1k_1 = v_2(v_2-1) = (k_1+1)k_1 \\ b = v = v_1 = v_2 = k_1 + 1 \end{cases}$$

其中：k_2 是任意正整数，$k_1 = k_2^2 + 1$，

2. 若 $v_1 = v_2^2$ 代入⑬式整理移项得：

$k_1^2 - k_2^2 = 1$，容易得到此式无解。

3. 若 $v_1 = v_2k_2$ 代入⑬式整理移项得：

$v_2k_2 = k_1^2 - 1$ ⑮

⑮$\Rightarrow v_2k_2 = (k_1+1)(k_1-1)$

令 $k_1 + 1 = k_2$，$k_1 - 1 = v_2 \Rightarrow k_1 = 1 + v_2$

则 $k_2 + v_2 = 2k_1$

$k_2 - v_2 = 2 \Rightarrow k_2 = v_2 + 2$

于是得到：

$$\begin{cases} z = vk = v_1k = v_2k_2k = (v_2k_2)^2 \\ \quad = [(k_1-1)(k_1+1)]^2 = (k_1^2-1)^2 \\ a = v_1k_1 = k_1v_1k_2 = k_1(k_1^2-1) \\ b = v = v_1 = v_2k_2 = k_1^2 - 1 \end{cases}$$

其中 $k_1 > 1$，

4. 若 $v_1 = v_2 k_2^2$ 代入⑬式整理移项得：

$$v_2 = k_1^2 - 1 \qquad ⑯$$

于是得到⑨式的解为：

$$\begin{cases} z = vk = v_1 k = v_1 v_2 k_2 = (v_2 k_2^2) v_2 k_2 \\ \quad = v_2^2 k_2^2 = (k_1^2 - 1) k_2^3 \\ a = v_1 k_1 = (v_2 k_2^2) k_1 = (k_1^2 - 1) k_2^2 k_1 \\ b = v = v_1 \quad v_2 k_2^2 = (k_1^2 - 1) k_2^2 \end{cases}$$

其中：$k_1 > 1$，k_2 是任意正整数。

⑯式讨论的结果，实际和⑮式相同【请阅本题末后 *】

B、若 $z = v_1^2$ 代入⑪式整理移项得：

$$v_1^2 + k^2 = k_1^2 \qquad ⑰$$

由第六章第一节勾股定理，⑰式有：

$$v_1 = 2mn, k = m^2 - n^2, k_1 = m^2 + n^2$$

于是得到⑨式的解为：

$$\begin{cases} z = vk = v_1^2 k = (2mn)^2 (m^2 - n^2) \\ a = v_1 k_1 = 2mn(m^2 + n^2) \\ b = v = v_1^2 = (2mn)^2 \end{cases}$$

其中：$(m,n) = 1 \quad 2 \nmid m + n \quad m > n$

（二）若 $b = v^2$ 代入⑩式整理移项得：

$$v^4 = a^2 - k^2 \qquad ⑬$$

由第七章第四节公式，⑯式有：

$$v = c^2 \quad d^2$$

$$1\begin{cases} a_1 = (c^2 + d^2)(c^2 - d^2) \\ k_1 = 2cd(c^2 \quad d^2) \end{cases}$$

$$2\begin{cases} a_2 = (2cd)^2 + (c^2 + d^2)^2 \\ k_2 = 2(2cd)(c^2 + d^2) \end{cases}$$

于是得到 ⑨ 式的解为：

$$\begin{cases} z = vk = (c^2 - d^2)k \\ a\begin{cases} a_1 = (c^2 + d^2)(c^2 - d^2) \\ a_2 = (2cd)^2 + (c^2 + d^2) \end{cases} \\ b = v^2 = (c^2 - d^2)^2 \end{cases}$$

其中 $c > d, k = \begin{cases} k_1 = 2cd(c^2 - d^2) \\ k_2 = 2(2cd)(c^2 + d^2) \end{cases}$

如果取 k_1 时，则同时取 a_1

如果取 k_2 时，则同时取 a_2

二、再讨论 $z^2 = b(3a^2 + b^2)$ ⑲

设 $z = vk$ 代入 ⑲ 式得：

$v^2k^2 = b(3a^2 + b^2)$ ⑳

⑳ 式中，因 $b < 3a^2 + b^2$，同一的道理，⑳ 式中有：

$b = v, v^2, b \neq vk, vk^2$。

（一）若 $b = v$ 代入 ⑳ 式整理移项得：

$3a^2 = v(k^2 - v)$ ㉑

在 ㉑ 式中，因为 3 是素数，故有两种情况，即：

如果 $3|v$，则 $v = 3m$

如果 $3|(k^2 - v)$，，则 $k^2 - v = 3n$

A、设 $v = 3m$ 代入 ㉑ 式整理移项得：

$a^2 = m(k^2 - 3m)$ ㉒

同样方法，设 $a = v_1k_1$ 代入 ㉒ 式得：

$v_1^2k_1^2 = m(k^2 - 3m)$ ㉓

m 是 $v_1^2k_1^2$ 的一个因数，故有：

$m = v_1, v_1^2, v_1k_1, v_1k_1^2$。

1. 若 $m = v_1$ 代入 ㉓ 式整理移项得：

$k^2 = v_1(k_1^2 + 3)$ ㉔

设 $k = v_2k_2$ 代入 ㉔ 式得：

$$v_2^2k_2^2 = v_1(k_1^2 + 3) \qquad ㉕$$

v_1 是 $v_2^2k_2^2$ 的一个因数，故有：

$v_1 = v_2, v_2^2, v_2k_2, v_2k_2^2$。

(a) 若 $v_1 = v_2$ 代入㉕式整理移项得：

$$v_2k_2^2 = 3 + k_1^2 \qquad ㉖$$

于是得到⑲式的解为：

$$\begin{cases} z = vk = 3mv_2k_2 = 3v_1v_2k_2 = 3v_2^2k_2 \\ a = v_1k_1 = v_2k_1 \\ b = v = 3m = 3v_1 = 3v_2 \end{cases}$$

其中 $k_1 > 3$

由㉖式造表如下（表1）

k_1	4	5		6	7		8	9		10	11		…
$v_2 = \frac{3+k_1^2}{k_2^2}$	19	28	7	39	52	13	67	84	21	103	124	31	…
$k_2 = \sqrt{\frac{3+k_1^2}{v_2}}$	1	1	2	1	1	2	1	1	2	1	1	2	…

(b) 若 $v_1 = v_2^2$ 代入㉕式整理移项得：

$$k_2^2 - k_1^2 = 3 \qquad ㉗$$

即 $(k_2 + k_1)(k_2 - k_1) = 3$

∵3是素数，且 $k_2 + k_1 > k_2 - k_1$

∴可令 $k_2 + k_1 = 3, k_2 - k_1 = 1$

用“和差数法”得到：$k_2 = 2, k_1 = 1$

于是得到

$$\begin{cases} a = v_1k_1 = v_2^2k_1 = v^2 \\ b = v = 3m = 3v_1 = 3v_2^2 \end{cases}$$

但∵$3v_2^2 > v_2^2$ 得到 $b > a$，这和要求 $a > b$ 发生矛盾，故知它不是⑧式的解，从而不是①式即原式的解。

(c) 若 $v_1 = v_2k_2$ 代入 ㉕ 式整理移项得：

$$v_2k_2 = k_1^2 + 3 \qquad ㉘$$

于是得到 ⑲ 式的解为：

$$\begin{cases} z = vk - 3mv_2k_2 = 3v_1v_2k_2 = 3v_2^2k_2^2 = 3(k_1^2+3)^2 \\ a = v_1k_1 = v_2k_2k_1 = k_1(k_1^2+3) \\ b = v - 3m = 3v_1 = 3v_2k_2 = 3(k_1^2+3) \end{cases}$$

其中 $k > 3$。

(c) 讨论的结果已为(a)的讨论所包含。

(d) 若 $v_1 = v_2k_2$ 代入 ㉕ 式整理移项得：

$$v_2 = k_1^2 + 3 \qquad ㉘$$

于是得到 ⑲ 式的解为：

$$\begin{cases} z = vk - 3mv_2k_2 = 3v_1(k_1^2+3)k_2 = 3v_2k_2^3(k_1^2+3) \\ \quad = 3k_2^3(k_1^2+3)^2 \\ a = v_1k_1 = v_2k_2^2k_1 = k_2^2k_1(k_1^2+3) \\ b = v - 3m = 3v_1 = 3v_2k_2^2 = 3k_2^2(k_1^2+3) \end{cases}$$

其中 $k_1 > 3$，k_2 是任意正整数。

(d) 讨论的结果也已为(c)的讨论所包含。

2. 若 $m = v_1^2$ 代入 ㉓ 式整理移项得：

$$k^2 = k_1^2 - 3v_1^2 \qquad ㉚$$

于是得到 ⑲ 式的解为：

$$\begin{cases} z = vk = 3v_1^2k \\ a = v_1k_1 \\ b = v - 3m = 3v_1^2 \end{cases}$$

其中 $k_1 > 3v_1$，v_1, k, k_1 的值可从下列表 2 选择。

在 ㉚ 式中，取 $v_1 = 1,2,3,\cdots$ 代入计算并用“和差数法”计算，即：

当 $v_1 = 1$ 时，代入 ㉚ 式得：

$(k+k_1)(k-k_1)=3=3\times 1$

可得:$k=2, k_1=1$

当 $v_1=2$ 时,代入 ㉚ 式得:

$(k+k_1)(k-k_1)=12=6\times 2$

可得:$k=4$, $k_1=2$

当 $v_1=3$ 时,代入 ㉚ 式得:

$(k+k_1)(k-k_1)=27=27\times 1=9\times 3$

可得:$k=14,6$ $k_1=13,3$

当 $v_1=4$ 时,…(略)如表 2

v_1	1	2	3		4			5			6		7			…
k	2	4	14	6	13	8	7	38	14	10	28	12	74	26	14	…
k_1	1	2	13	3	11	4	1	37	11	5	26	6	73	23	7	…

又 $\because k_1>3v_1$ $\therefore v_1>4$

3. 若 $m=v_1k_1$

而 $a=v_1k_1$

$b=v=3m=3v_1k_1$

$\because v_1k_1<3v_1k_1$ $\therefore a<b$,这和要求 $a>b$ 发生矛盾。

4. 若 $m=v_1k_1^2$

而 $a=v_1k_1$

$b=v=3m=3v_1k_1^2$

$\because v_1k_1<3v_1k_1^2$ $\therefore a<b$,这和要求 $a>b$ 发生矛盾

B、设 $k^2-v=3n$ 代入 ㉑ 式整理移项得:

$a^2=n(k^2-3n)$ 这和 ㉒ 式的讨论相同,(略)。

(二) 若 $b=v^2$ 代入 ⑳ 式整理移项得:

$$3a^2=k^2-v^4 \quad ㉛$$

即 $3a^2=(k+v^2)(k-v^2)$ ㉜

在 ㉜ 式中,如果 $3|k+v^2$,则令 $3m=k+v^2$

如果 $3\ k\ \ v^2$，则令 $3n = k - v^2$

A、设 $3m = k + v^2$，即 $v^2 = 3m\ \ k$，代入 ㉜ 式得：

$$a^2 = m(2k\ \ 3m) \quad ㉝$$

设 $a = v_1k_1$ 代入 ㉝ 式得：

$$v_1^2k_1^2 = m(2k\ \ 3m) \quad ㉞$$

m 是 $v_1{}^2k_1^2$ 的一个因数

故有 $m = v_1, v_1^2, v_1k_1, v_1k_1^2$

1. 若 $m = v_1$，代入 ㉞ 式整理移项得：

$$v_1(k_1^2 + 3) = 2k \quad ㉟$$

在 ㉟ 式中，如果 $2\ v_1$，则令 $2c = v_1$

如果 $2\ k_1^2 + 3$，则令 $2d = k_1^2 + 3$.

(a) 若 $v_1 = 2c$ 代入 ㉟ 式整理移项得：

$$k = c(k_1^2 + 3) \quad ㊱$$

而 $a = v_1k_1 = 2ck_1$

$b = v^2 - 3m = k - 3v_1 = k - 3(2c)\ \ k$

$= 6c\ \ k - 6c\ \ c(k_1^2 + 3) - c(3 - k_1^2)$

由于 $(3\ \ k_1^2) > 0$，得知唯有 $k_1 = 1$

以 $k_1 = 1$ 代入 a 和 b 得到：

$a = 2ck_1 = 2c$

$b = c(3\ \ k_1^2) = 2c$

这和要求 $a > b$ 发生矛盾

(b) 若 $2d = k_1^2 + 3$，即 $k_1 = \sqrt{2d\ \ 3}$ 代入 ㉟ 式整理得：

$$v_1d = k \quad ㊲$$

而 $a = v_1k_1 = v_1\sqrt{2d\ \ 3}$

$b = v^2 - 3m\ \ k - 3v_1\ \ k - 3v_1\ \ v_1d - v_1(3\ \ d)$

由于 $(3 - d) > 0$ 和 $\sqrt{2d\ \ 3} > 0$，得知有唯一：$d = 2$

以 $d = 2$ 代入以上 a、b 得到：

$a = v_1\sqrt{2d-3} = v_1$

$b = v_1(3-d) = v_1$

这和要求 $a > b$ 发生矛盾。

2. 若 $m = v_1^2$ 代入 ㉞ 式整理移项得：

$$3v_1^2 - 2k = k_1^2 \quad ㊳$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = \dfrac{3v_1^2 + k_1^2}{2} \\ 或\ v_1^2 = \dfrac{2k - k_1^2}{3} \end{cases}$$

于是得到

$$\begin{cases} z = vk \\ a = v_1k_1 \\ b = v^2 - 3m = k = 3v_1^2 - k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 3v_1^2 - k = 3\left(\dfrac{2k - k_1^2}{3}\right) - k = k - k_1^2 \\ 或\ b = v^2 - 3v_1^2 - k = 3v_1^2 - \dfrac{3v_1^2 + k_1^2}{2} = \dfrac{3v_1^2 - k_1^2}{2} \end{cases}$$

而 $v^2 = \dfrac{3v_1^2 - k_1^2}{2}$

即 $2v^2 = 3v_1^2 - k_1^2$ $\quad (W)$

由 ㊳ 式可得：v_1 和 k_1 同奇偶，即 $2 \mid v_1 + k_1$，且 $k_1 > v_1$，不然的话，如 $v_1 = k_1$，则由 ㊳ 式得到 $k = 2k_1^2$，代入 $b = k - k_1^2 = k_1^2$，又以 $v_1 = k_1$ 代入 $a = v_1k_1 = k_1^2$，从而得到 $a = b$，这和要求 $a > b$，发生矛盾，故 $v_1 \neq k_1$；如 $k_1 < v_1$，因 k_1 和 v_1 同奇偶，则有 $v_1 = k_1 + 2c$【c 是正整数】，以 $v_1 = k_1 + 2c$ 代入 ㊳ 式整理得到

$$k = 2k_1^2 + 6ck_1 + 6c^2$$

以 $v_1 = k_1 + 2c$ 代入 $a = v_1k_1 = k_1(k_1 + 2c) = k_1^2 + 2ck_1$

以 $k = 2k_1^2 + 6ck_1 + 6c^2$ 代入 $b = k - k_1^2$ 整理得

$b = k_1^2 + 6ck_1 + 6c^2$，这就得到 $b > a$，而和要求 $a > b$ 发生矛

盾，由 $k_1 \neq v_1$ 和 $k_1 \nless v_1$，故应取 $k_1 > v_1$

在 (W) 中，由于 $2v_1 + k_1$ 和 $k_1 > v_1$，

故可设 $k_1 = v_1 + 2c$ 并代入 (W) 式整理移项得：

$v_1^2 - 2c(v_1 + c) - v^2 = 0$

即 $v_1^2 - 2cv_1 - (2c^2 + v^2) = 0$

代入求根公式整理得：

$v_1 = c \pm \sqrt{3c^2 + v^2}$

令 $s^2 = 3c^2 + v^2$ 移项得：

$3c^2 = s^2 - v^2 = (s + v)(s - v)$

当 $c = 1$ 时，则有 $3 = (s + v)(s - v)$

用“和差数法”可得：$s = 2, v = 1$

$c = 2$ 时　　可得：$s = 4, v = 2$

$c = 3$ 时　　可得：$\begin{cases} s' = 14, v' = 13 \\ s'' = 6, v'' = 3 \end{cases}$

$c = 4$ 时　　可得：$\begin{cases} s' = 13, v' = 11 \\ s'' = 8, v'' = 4 \\ s''' = 7, v''' = 1 \end{cases}$

$c = 5$ 时　　可得：$\begin{cases} s' = 38, v' = 37 \\ s'' = 14, v'' = 11 \\ s''' = 10, v''' = 5 \end{cases}$

……　　　　……（略）

造表如下、表 3）

c	1	2	3		4			5			…
v	1	2	13	3	11	4	1	37	11	5	…
v_1	3	6	17	9	17	12	11	43	19	15	…
k_1	5	10	23	15	25	20	19	53	29	25	…
$k = \frac{3v_1^2 + k_1^2}{2}$	26	104	698	234	746	416	362	4178	962	650	…
$a = v_1 k$	15	60	391	135	425	240	209	2279	551	375	…
$b = v^2$	1	4	169	9	121	16	1	1369	121	25	…
$c = vk$	26	208	9074	702	8206	1664	362	154586	10582	3250	…

3. 若 $m = v_1k_1$ 代入㉞式整理移项得：

$$2v_1k_1 = k \qquad ㊴$$

而 $a = v_1k_1$

$$b = v^2 = 3m - k = 3v_1k_1 - 2v_1k_1 = v_1k_1$$

得到 $a = b = v_1k_1$ 这和要求 $a > b$ 发生矛盾。

4. 若 $m = v_1k_1^2$ 代入㉞式整理移项得：

$$v_1(1 + 3k_1^2) = 2k \qquad ㊵$$

在㊵式中，如果 $2 | v_1$，则令 $v_1 = 2c$

如果 $2 | 1 + 3k_1^2$，则令 $1 + 3k_1^2 = 2d$

(a) 以 $v_1 = 2c$ 代入㊵式整理移项得：

$$c(1 + 3k_1^2) = k$$

即 $k_1 = \sqrt{\frac{k - c}{3c}}$

而 $a = v_1k_1 = v_1\sqrt{\frac{k - c}{3c}}$

$$b = v^2 = 3m - k = 3v_1k_1^2 - k = 3v_1\left(\frac{k - c}{3c}\right) - k$$

这时，如 $\sqrt{\frac{k - c}{3c}} = 1$，得到 $k = 4c$

于是 $a = v_1$

$$b = 3v_1 - k = 3v_1 - 4c = 3v_1 - 2v_1 = v_1$$

得到 $a = b = v_1$，这和要求 $a > b$ 发生矛盾。

如 $\sqrt{\frac{k - c}{3c}} = 2$，得到 $k = 13c$

于是 $a = v_1k_1 = 2v_1 = 4c$

$$b = v^2 = 3m - k = 3v_1k_1^2 - 13c = 3v_1(2^2) - 13c$$

$= 24c - 13c = 11c$ 这和 $a > b$ 发生矛盾

如 $\sqrt{\frac{k - c}{3c}} = 3$，得到 $k = 28c$

于是 $a = 3v_1 = 6c$

$$b = 3v_1k_1^2 - k = 3v_1(3^2) - 28c = 27v_1 - 28c$$

$$= 54c - 28c = 26c$$ 这也和要求 $a > b$ 发生矛盾

如 $\sqrt{\frac{k-c}{3c}} = 4, \cdots$

故知，当 $k_1 = \sqrt{\frac{k-c}{3c}} > 1$ 时，代入 a、b 得到的都是 $b > a$，而和要求 $a > b$ 发生矛盾。

(b) 以 $1 + 3k_1^2 = 2d$ 代入 ㊵ 式整理得：

$$v_1 d = k \Rightarrow v_1 = \frac{k}{d}$$

而 $a = v_1 k_1 = \frac{kk_1}{d}$

$$b = v^2 - 3m - k = 3v_1k_1^2 - k = \frac{3kk_1^2}{d} - k$$

$$= \frac{k}{d}(3k_1^2 - d)$$

这时，由于要求 $a > b > 0$，于是得到

$$a - b = \frac{kk_1}{d} - \frac{k}{d}(3k_1^2 - d) > 0$$

即 $\frac{k(d - 2k_1^2)}{d} > 0$，其中 $d - 2k_1^2 > 0$，又 $1 + 3k_1^2 = 2d$，得到 $d = \frac{1 + 3k_1^2}{2}$ 代入 $d - 2k_1^2 > 0$，整理得到 $\frac{1 - k_1^2}{2} > 0 \Rightarrow 1 - k_1^2 > 0 \Rightarrow 1 > k_1^2$ 这和 k_1 是正整数发生矛盾。

B、以 $3n = k - v^2$ 即 $v^2 = k - 3n$ 代入 ㉜ 式得：

$$a^2 = n(2k - 3n) \qquad ㊶$$

㊶ 式和 ㉝ 式相同，故 B 的讨论也和 A 的讨论相同。(略)

总结以上讨论，得知本题解的表示式有二，而第一式的 z、a、b 值，可由 ⑭、⑬、⑰、⑱ 四式讨论的结果表示出来；第二式的 z、a、b 值，可由 ⑳、㉚、㊳ 三式讨论的结果表示出来。【见以上】

在⑭讨论的结果中，如果取 $k_2=2$，可得到

$$\begin{cases} z=(k_2^2-2)^2k_2=8 \\ a=(k_2^2-2)(k_2^2-1)=6 \\ b=k_2^2-2=2 \end{cases}$$

将它们分别代入原题解第一表示式得到

$$\begin{cases} y=a^2-b^2=32 \\ x=a(a^2-b^2)=192 \\ z^2=b(a^2-b^2)=64 \Rightarrow z=8 \end{cases}$$

我们知道，原式中 x,y,z 的幂的最小公倍是 $[2,3,4]=12$，由第六章第二节《引理 A》，以 $M^{\frac{12}{2}}=2^6$ 去除 x 值，即 $\frac{192}{2^6}=3$，以 $M^{\frac{12}{3}}=2^4$ 去除 y 值，即 $\frac{32}{2^4}=2$，以 $M^{\frac{12}{4}}=2^3$ 去除 z 值，即 $\frac{8}{2^3}=1$，于是得到原式的最小解有：

$$\begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$$

因此 $\begin{cases} x=3M^6 \\ y=2M^4 \\ z=M^3 \end{cases}$ 【其中 M 是任意整数】

也是原式一组解的表示式，但它是由⑭式讨论结果的表示式导出来的，同理，原式也可以由⑮、⑰、⑱、㉖、㉚、㊳用同样方法导出此类解的表示式。

在以上㉖、㉚、㊳三个式讨论结果的表示式中，如果 $M^3\mid z$，$M^2\mid a$，$M^2\mid b$，则新值 z'，a'，b'，仍然是解的表示式中的 z,a,b 之值。

同理

$$\begin{cases} z=z'M^3 \\ a=a'M^2 \\ b=b'M^2 \end{cases}$$ 【其中 M 是任意整数】

也是第二式解的表示式。例如在表3中第4行，当 $c = 3, v = 3$ 时，有 $z = 702, a = 135, b = 9$，现以 $M^3 = 3^3, M^2 = 3^2$ 分别去除 z, a, b 得到的刚好等于第1行的 z, a, b 之值。

本题以上的解的表示式正如第七章第四节最后段，所说的，它们只是题解的一部份的表示式，而不是一切解的表示式。例如有一组解：$y = 6, x = 29, z = 5$，用以上解的表示式是不能给出的，分析如下：

将第一式解的讨论结果中，⑭式中之(a)：$z = (k_2^2 - 2)^2 k_2$，由以上的引理将 $z = 5$ 改为 $z = 5M^3$，并套入 $z = (k_2^2 - 2)^2 k_2$ 得到

$$(k_2^2 - 2)^2 k_2 = 5M^3 \qquad (\triangle)$$

在($\triangle$)式中，假设 $k_2^2 - 2$ 等于5的倍数，即令 $k_2^2 - 2 = 5h$ 转换为同余式得：

$k_2^2 \equiv 2 (mod 5)$ $\quad (\frac{2}{5}) = -1$，故由勒让得符号得知同余式无解。

因此，只有取 k_2 等于5的倍数，即 $k_2 = 5n$，代入($\triangle$)式整理得：

$$(625n^4 - 100n^2 + 4)n = M^3$$

由上式易知 M 有因数 n，令 $M = nM_1$，代入整理得：$625n^4 - 100n^2 + 4 = n^2 M_1^3$

移项整理得：$(\frac{2}{n})^2 = M_1^3 + 100 - 625n^2$

因 $\frac{2}{n}$ 是整数，得到 n 值要么是1，要么是2。

当 $n = 1$ 时，即 $\quad 4 = M_1^3 + 100 - 625$

即 $\quad 529 = M_1^3$，$\quad \sqrt[3]{529}$ 不是整数。

当 $n = 2$ 时，即 $\quad 1 = M_1^3 + 100 - 2500$

即 $\quad 2401 = M_1^3$，$\quad \sqrt[3]{2401}$ 不是整数。

又将⑭式中之(b)：

$z = (k_2^2 + 2)^2 k_2$，仿上法得：

$(k_2^2 + 2)^2 k_2 = 5M^3 \qquad (a)$

同上方法，因 $k_2^2 + 2 \equiv 3 (mod 5) = \left(\frac{3}{5}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = -1$ 无解。

取 $k_2 = 5n$ 代入 (a) 式整理得：

$(625n^4 + 100n^2 + 4)n = M^3$，令 $M = nM_1$ 代入整理得：

$\left(\frac{2}{n}\right)^2 = M_1^3 - 625n^2 - 100$

当 $n = 1$ 时，代入解得 $M_1 = 9$

【易知 $n = 2$ 时无解】 $\therefore$ $k_2 = 5, M = 9$。

即： $z = (k_2^2 + 2)^2 k_2 = 5M^3$

$a = (k_1 + 1)k_1 = (k_2^2 + 2)(k_2^2 + 1) = 27 \times 26 = 702$，

$b = k_1 + 1 = k_2^2 + 2 = 27$

将 a、b 代入本题解第一表示式得到：

$y = a^2 - b^2 = 702^2 - 27^2 = 492075$

$x = a(a - b^2) = 702 \times 492075 = 346036650$

以 $M^4 = 9^4 = 6561$ 去除 y 得到 $y = 75$，

以 $M^6 = 9^6 = 531441$ 去除 x 得到 $x = 650$，

以 $M^3 = 9^3 = 729$ 去除 z 得到 $z = 5$

得到原题一组解为：$y = 75$，$x = 650$，$z = 5$。

用同样方法将⑮⑰⑱式讨论结果的表示式也不能给出上面所说的那一组解。【指 $y = 6$，$x = 29$，$z = 5$，下同】。

现再将第二式的㉖讨论结果中的 $z = 3v_2^2k_2$ 来讨论，因表 1 的 v_2 和 k_2 都不含因数 5，故知不可能给出那一组解。

将㉚式讨论结果中的 $z = 3v_1^2k$ 通过表 2 得到 $z = 3v_1^2k = 3 \times 5^2 \times 38$，并由以上引理套入得到 $z = 5M^3 = 3 \times 5^2 \times 38 \Rightarrow M^3 = 3 \times 5 \times 38$，因 $\sqrt[3]{3 \times 5 \times 38}$ 不是整数。

将㊳式讨论结果中的表 3 得到：

$z = 3250 \Rightarrow z = 5M^3 = 3250 \Rightarrow M^3 = 650$，因 $\sqrt[3]{650}$ 不是整数。故以上讨论的解的表示式都不能给出那一组解。

可用第六章第二节的方法，求出本题一切解：

$$y^3 = x^2 - (z^2)^2$$

即 $\quad y^3 = (x+z^2)(x-z^2)$

令 $y = vk$，$x + z^2 = a$，$x - z^2 = b$；

$a - b = 2z^2$，$a = 2z^2 + b$，

整理得到：

$$x = \frac{(vk)^3 + b^2}{2}$$

$$z^2 = \frac{(vk)^3 - b^2}{2} \qquad (※)$$

以 $b = v, v^2, v^3, vk, v^2k, v^3k$，$\qquad (k > v)$

代入(※)式，整理可得：

$$\left.\begin{array}{ll}
1. & x = \dfrac{v(vk^3+1)}{2}, \quad z^2 = \dfrac{v(vk^3-1)}{2} \\
2. & x = \dfrac{v(k^3+v)}{2}, \quad z^2 = \dfrac{v(k^3-v)}{2} \\
3. & x = \dfrac{k^3+v^3}{2}, \quad z^2 = \dfrac{k^3-v^3}{2} \\
4. & x = \dfrac{vk(vk+1)}{2}, \quad z^2 = \dfrac{vk(vk-1)}{2} \\
5. & x = \dfrac{vk(k+v)}{2}, \quad z^2 = \dfrac{vk(k-v)}{2} \\
6. & x = \dfrac{k(k+v^3)}{2}, \quad z^2 = \dfrac{k(k-v^3)}{2}
\end{array}\right\} \quad (b)$$

然后适当地取 k 和 v 以满足 (b) 式的整数解。例如，在 (b) 式的最后一式，当取 $k = 9, v = 1$ 时，就可得到 $x = 45, z = 6, y = 9$。至于上面所指那一组解，经计算后，可知在 (b) 式中的第 2 式，取 $k = 3, v = 2$ 时，就可得到，即 $x = 29, z = 5, y = 6$。

注：这 $x = 29, z = 5, y = 6$，也可由第十二章的引理，以 $a = 29, b = 5$ 代入解的表示式(见第十二章例七的原解的表示式)，再由《引理 A》以 $M = 2^2 \times 3^2$ 去运算就得到，请读者试演之。

第十三章

1. 解

(1) 由原式有 $\{15, 6\} = 30$

由十二章引理和原式可得到

$$30v + 1 = 7c \text{ 有解}$$

故(1) 式有解

(2) 将原式改形写成：

$$y^5 = x^{14} + z^{12}$$

上式有 $\{14, 12\} = 84$

由十二章引理和原式可得到

$$84v + 1 = 5c \text{ 有解}$$

故(2) 式有解

2. 解　原式有 $\{4, 6\} = 12$

因欧拉函数 $\varphi(12)$ 有 1,5,7,11 共四个，【即为不超过 12 而与 12 互素的正整数共有四个】

故原式中，当 $n = 1, 5, 7, 11 (mod 12)$ 时，原式必有解。即：

(a)　$x^{n=1+12q} = y^4 \pm z^6$ 其中 q 也是正整数，利用第十二章解的表示式，可得到(a) 式的解为：

$$\begin{cases} x = a^4 \pm b^6 \\ y = a(a^4 \pm b^6)^{0+\frac{\pm 2q}{4}=3q} \\ z = b(a^4 \pm b^6)^{0+\frac{+2q}{6}=2q} \end{cases}$$

(b)　在(a) 式中，取 $q = 2$ 得到 $n = 1 + 12q = 25$，用同(a) 的

方法得到 $x^{25} = y^4 \pm z^6$ 式的解为：

$$\begin{cases} x = a^4 \pm b^6 \\ y = a(a^4 \pm b^6)^{0+\frac{2\times 12\times 1}{4}=6} \\ z = b(a^4 \pm b^6)^{0+\frac{2\times 12\times 1}{6}=4} \end{cases}$$

由于 $25 = 5 \times 5$

故当方程为 $x^5 = y^4 \pm z^6$ 时，可得到它的解为：

$$\begin{cases} x = (a^4 \pm b^6)^5 \\ y = a(a^4 \pm b^6)^6 \\ z = b(a^4 \pm b^6)^4 \end{cases}$$

同理可得：$x^{n=5+12q} = y^4 \pm z^6$ 的解为：

$$\begin{cases} x = (a^4 \pm b^6)^5 \\ y = a(a^4 \pm b^6)^{6+\frac{12\times 5q}{4}} \\ z = b(a^4 \pm b^6)^{4+\frac{12\times 5q}{6}} \end{cases}$$

(c)　在 (a) 式中取 $q = 4$ 得到 $n = 1 + 12q = 49$ 用同 (a)、(b) 的方法得到

$x^{n=7+12q} = y^4 \pm z^6$ 的解为：

$$\begin{cases} x = (a^4 \pm b^6)^7 \\ y = a(a^4 \pm b^6)^{12+\frac{12\times 7q}{4}} \\ z = b(a^4 \pm b^6)^{8+\frac{12\times 7q}{6}} \end{cases}$$

(d)　在 (a) 式中取 $q = 10$ 得到 $n = 1 + 12q = 121$，用同 (a)、(b) 的方法得到

$x^{n=11+12q} = y^4 \pm z^6$ 的解为：

$$\begin{cases} x = (a^4 \pm b^6)^{11} \\ y = a(a^4 \pm b^6)^{30+\frac{12\times 11q}{4}} \\ z = b(a^4 \pm b^6)^{20+\frac{12\times 11q}{6}} \end{cases}$$

(e)　当 $n = 2$ 时，即 $x^2 = y^4 + z^6$ 有解，【请阅本章例四】

(*f*) 当 $n = 3$ 时，只有 $x^3 = y^4 + z^6$ 有解，其解为：

$$x = 18M^4,\quad y = 9M^3,\quad z = 3M^2$$【解法略】

当 $n = 9$ 时，只有 $x^9 = y^4 + z^6$ 有解，解法如下：

将方程改写成：

$$y^4 = (x^3)^3 + (z^2)^3$$

由第八章第一节公式和上式，有：

$$\begin{cases} y = a^3 + b^3 \\ x^3 = a(a^3 + b^3) \\ z^2 = b(a^3 + b^3) \end{cases}$$

由第六章第二节《引理 A》以 M^3 去乘 y 的值，以 M^4 去乘 x^3 和 z^2 的值，这时由于出现

$$z^2 = b(a^3 + b^3)M^4$$

式而与本章例三的情况相同，故只能仿例三的解法取 $a = 2, b = 1$ 代入以上解的表示式，并整理得到：

$$\begin{cases} y = a^3 + b^3 = 3^2 \\ x^3 = a(a^3 + b^3) = 2 \times 3^2 \\ z^2 = b(a^3 + b^3) = 3^2 \end{cases}$$

先在 $x^3 = 2 \times 3^2 \times M^4$ 式中，用配方方法求出 M 值，即

$$x^3 = 2 \times 3^2 \times (2^2 \times 3)^4 = 2^9 \times 3^6$$

得到　$M = 2^2 \times 3,\quad x = 2^3 \times 3^2$

再在　$z^2 = 3^2(2^2 \times 3)^4 = 2^8 \times 3^6$

得到　$z = 2^4 \times 3^3$

$$y = 3^2 \times (2^2 \times 3)^3 = 2^6 \times 3^5$$

同上道理可得到一组解为：

$$\begin{cases} x = 2^3 \times 3^2 M^4 \\ y = 2^6 \times 3^5 M^9 \\ z = 2^4 \times 3^3 M^6 \end{cases}$$　M 是任意整数

(*g*) 当 $n = 10$ 时，即　$x^{10} = y^4 + z^6$

改写成 $$(x^2)^5 = y^4 + z^6$$
由本章一的公式和上式有：

$$(4,6) = W = 12$$

$$12v + 1 = 5c \quad 得到\ v = 2, c = 5$$

$$\begin{cases} x^2 = (a^4 + b^6)^5 \\ y = a(a^4 + b^6)^6 \\ z = b(a^4 + b^6)^4 \end{cases}$$

在 $x^2 = (a^4 + b^6)^5$ 式中

令 $x_1^2 = a^4 + b^6$

则有：$(x_1^2)^5 = x^2$，得到 $x = x_1^5$

现先解 $x_1^2 = a^4 + b^6$

上式即第十二章例四，故得到它的解的表示式为：

$$① \begin{cases} x_1 = (2a_1b_1)^3(a_1^2 - b_1^2)(a_1^4 - b_1^4)M_1^6 \\ a = (2a_1b_1)^2(a_1^2 - b_1^2)M_1^3 \\ b = 2a_1b_1(a_1^2 - b_1^2)M_1^2 \end{cases}$$

从而得到 $x^{10} = y^4 + z^6$ 的解的表示式为：

$$② \begin{cases} x = x_1^5 M_2^6 \\ y = a(a^4 + b^6)^6 M_2^{15} \\ z = b(a^4 + b^6)^4 M_2^{10} \end{cases}$$

以上②中的 a、b 和 x_1 由①给出，①中的 a_1、b_1 和 M_1、M_2 都是零以外的整数，而 $a_1 \neq b_1$。

(h) 由第九章引理得知，$n = 4, 8$ 时，方程无解，由第十二章讨论得知，$n = 6$ 时，方程无解，由上得知，【本题】

当 $n \equiv 1,2,3,5,7,9,10,11 (mod 12)$ 时，方程有解。

当 $n \equiv 4,6,8 (mod 12)$ 时，方程无解。

第十四章　方形图每行数字之和都相等的填数法

将不同的数字（指零以外的正整数）填入一个多方格的方形图【以下均称方形图】要求它的直行、横行、斜角行，每行的数字之和都相等，那么，这些数字应该怎样选取呢？已知方形图的小方格数，要么是奇平方数，要么是偶平方数。现在，就以这奇数、偶数两方面分别来讨论。

设 m^2 是方形图的小方格数，并且 m 是奇数，现在我们由简到繁，循序讨论。

第一节　9格图每行3数之和都相等的填数法

取 $m=3$ 得到 $m^2=9$，即一个共有9小格的方形图，取9个不同的数字填成图 $A1$，假设图 $A1$ 的数字是符合要求的。

A	B	C
D	E	F
G	H	I

图 $A1$

设 y_3 为图 $A1$ 每行三数之和，已知：

$B+E+H=D+E+F=$

$A+E+I=C+E+G=y_3$　①

将①式销去 E 后得到：$B+H=D+F=A+I=C+G$　②

设 $Z=B+H=D+F=A+I=C+G$　③

由图 $A1$ 及③式容易得到：$4Z+E=3y_3$　④

由①、③式得到：$Z + E = y_3$ ⑤

$3 \times$ ⑤ − ④ 得到：$Z = 2E$ ⑥

由⑤、⑥式得到：$y_3 = 3E$ ⑦

以 E 为中心，上下【或左右、或斜角】二数，因这二数之和等于 $2E$，得到这二数必然分别是：大数大于 E，小数小于 E，

因为　　大数 + 小数 = $2E$

设　　　大数 − 小数 = $2t$

得到　　大数 = $E + t$

　　　　小数 = $E - t$　　　t 是小于 E 的整数。

又因为除了中心格外，周围还有 8 个数字，故可令

$t = 1, 2, 3, 4$。

在 $t = 1, 2, 3, 4$ 四数中，先选取三数，【指 t】分为二组，每组数字之和相等【令一组全部是正数，另一组全部是负数，以便抵销】，这三数选为上横行的数字。

选得　　1 + 2 = 3（一组）【也可 1 + 3 = 4】

　　　　3　（二组）【也可 4】

剩下的 4，填在左直行的中间格，至于上横行应选哪二数填在角格呢？可在一、二组中各选一数，但这二数之和【或在同一组中选二数之差】要等于 4，为什么呢？因为：如图 A2【上横行二角】，这"+ 1"与"− 3"在上横行是一正一负，但在左直行则同是正，即"+ 1"与"+ 3"，所以左直行中间数，就要等于这二数之和，但取相反符号，即"− 4"，这样才能抵销，使每行仍等于 $3E$。由于左直行中间的数字是 t 值中仅剩下的"4"，所以要以"4"去决定上横行两角数字的选取。同理，如果上横行选：

1 + 3 = 4　（一组）

4　　（二组）

这时四个 t 数中仅剩"2"填在左直行中间，这就决定，上横行两角数字的选取是同组的二数，而这二数之差等于 2，即"+ 1"与

"+ 3",这 2 应为" + 2"。

因为图的 9 个数字都是零以外的正整数,故 E 的选值是:$E >$ 4,如取 $E - 5$,可填成图 $A3$。

$E+1$	$E+2$	$E\ \ 3$
$E-4$	E	$E+4$
$E+3$	$E\ \ 2$	$E\ \ 1$

图 $A2$

6	7	2
1	5	9
8	3	4

图 $A3$

图 $A2$ 是填 9 个连续数【也含 9 个等差列数,但 t 要乘公差数】的依据,如果不拘于连续数,那就更容易了,随便举一例,并依序填图,先图 $A4$,后图 $A5$,【图 $A4$ 上横行三个 t 数,必须是二奇一偶,否则,不能取正负符号抵销】图 $A5$ 应取 $E > 6$,如取 $E - 10$,可填成图 $A6$。

$E+5$	$E\ \ 6$	$E+1$
	E	
$E\ \ 1$	$E+6$	$E\ \ 5$

图 $A4$

$E+5$	$E\ \ 6$	$E+1$
$E-4$	E	$E+4$
$E\ \ 1$	$E+6$	$E-5$

图 $A5$

15	4	11
6	10	14
9	16	5

图 $A6$

第二节　25 格图每行 5 数之和都相等的填数法

取 $m - 5$,得到 $m^2 - 25$,即填一个 25 格的方形图,可在填 9 格图的基础上,再填外层的 16 格。已知内 9 格,每行三数之和相等,所以每行增加的二数之和也必相等,这时所增加的 16 数,可分为 8 对称数,继续用:$E \pm 5$,± 6,± 7,± 8,± 9,± 10,± 11,± 12 代这 8 对称数。

仿本章第一节方法,在以上 8 数中,先选 5 数,分为二组,每组数字之和相等【这 5 数中,必有二个或四个奇数】做为上横行 5 个数字。

选得： $5+9+8=22$ （一组）

$10+12=22$ （二组）

剩下三数，也分为二组，填在左直行中间三格，

选得： $6+7=13$ （一组）

11 （二组）

因 $13-11=2$，在上横行二组中，看哪一组中有二数之差等于 2，就选这二数填在角格，因此，选第二组中的 10 与 12 填在角格，就可填成图 $A7$，中间 9 格数字取图 $A2$，这时应取 $E>12$，如取 $E=15$，可填成图 $A8$。

$E+12$	$E-5$	$E-9$	$E-8$	$E+10$
$E+11$				$E-11$
$E-7$				$E+7$
$E-6$				$E+6$
$E-10$	$F+5$	$E+9$	$E+8$	$E-12$

图 $A7$

27	10	6	7	25
26	16	17	12	4
8	11	15	19	22
9	18	13	14	21
5	20	24	23	3

图 $A8$

归纳本章第一、第二节

因 $y_3=3E$ (A)

又 $y_5-y_3=2E$ (B)

以(A)代入(B)得：$y_5=5E$

由此类推可得：

$$y_m=mE \qquad ⑧$$

又因：y_3 取 E 的范围是 $E>4$，得到 $E>\frac{3^2-1}{2}$，

y_5 取 E 的范围是 $E>12$，得到 $E>\frac{5^2-1}{2}$，

由此类推可得：

$$E>\frac{m^2-1}{2} \qquad ⑨$$

凡填 m^2 的方形图，都可仿以上方法填成。

设 n^2 是方形图的格数，并且 n 是偶数，我们也由简到繁，循序讨论。

第三节　4 格图不能填数

取 $n = 2$，得到 $n^2 = 4$，将四个数字填入一个共有四小格的方形图，假设这图不论是直行、横行、斜角行，每行二数之和都相等，则由图 $A9$ 得到：

$$a + b = c + d = a + c = b + d = a + d = b + c$$

将上式整理得到 $a = b = c = d$，由此可知这四个数字都是相等的。反过来说，四个不同的数字不符合填入四格方形图的要求。

a	b
c	d

图 $A9$

第四节　16 格图每行 4 数之和都相等的填数法

取 $n = 4$，得到 $n^2 = 16$，即讨论 16 小格方形图的填法。

设图 $A10$ 是符合要求的

由图 $A10$ 已知：

$$A + B + C + D = E + F + G + H = I + J + K + L = M + N + O + P = A + E + I + M = B + F + J + N = C + G + K + O = D + H + L + P \quad ⑩$$

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L
M	N	O	P

图 $A10$

设每行四数之和 $= y_4$

得到 S_{16}【设为 16 小格数字之和】$= 4y_4$ ⑪

取外层四行，即 $(A+B+C+D)+(M+N+O+P)+(A+E+I+M)+(D+H+L+P)=4y_4$ ⑫

由⑫ − ⑪：$(A+D+M+P)-(F+G+J+K)=0$

移项得 $(A+D+M+P)=(F+G+J+K)$ ⑬

因：$(A+F+K+P)+(D+G+J+M)=2y_4$ ⑭

故从⑬⑭式看，可知

$$(A+D+M+P)=(F+G+J+K)=y_4 \quad ⑮$$

这就是说，图 A10 的中心四数之和，四个角数之和，每行四数之和都相等。

为了容易计算起见，将图 A10 中心四数字，代以 a、b、c、d，因这四数之和等于每行四数之和，可做：从每行数字看，都有 a、b、c、d，如图 A12。

先填

	a	b	
	c	d	

图 A11

再填（即从每行看都有 $abcd$）

b	d	c	a
c	a	b	d
a	c	d	b
d	b	a	c

图 A12

从图 A12 看，四周相对称的数有 6 对，即从斜角行看，有 a 对 d 与 b 对 c，从直行看，有 d 对 b 与 c 对 a，从横行看，有 c 对 d 与 a 对 b，这相对的二数，分别用同一数予加减，即一个是加而另一个是减，例如斜角 a 对 d，则用 $a+1$ 与 $d-1$，但下次就不能重复用 $a+1$ 或 $d-1$，如直行 c 对 a 时，就不能用 $a+1$ 对 $c-1$；先从上横行四数填起，同时也填下横行四数，这四数【这里均指 a、b、c、d 所附予加减的整数】，凡是奇数字，必取双个才能抵销，使每行之和仍等于 a、b、c、d 之和，如果全部是奇数字或全部是偶数字，则不能取同

-数，否则也会重复。为了容易选取与避免重复起见，可以按以下次序填写：

b	d	c	a
c	a	b	d
a	c	d	b
d	b	a	c

同时写：a
b
c
d

图 $A13$

b 1	d	c	$a+1$
c	a	b	d
a	c	d	b
d · 1	b	a	$c+1$

写：a、+1
b、 1
c、+1
d、 1

图 $A14$

b · 1	$d+2$	c 2	$a+1$
c	a	b	d
a	c	d	b
d 1	b 2	$a+2$	$c+1$

写：a、+1、+2
b、 1、 2
c、+1、 2
d、 1、+2

图 $A15$

这时，从图 $A15$ 和右边写的 a、b、c、d 各行看，如果我们要求各行凑成连续数，显然在 a 行中，只能再写“+3”，从图 $A15$ 直行看，既取 $a+3$，就只能取 c 1，这左直行才能抵销使四数之和仍等于 a、b、c、d 之和，为什么在 a 行中不能取“-1”呢？因为如果取 a 1，就要取 $c+3$，但这 $c+3$ 在 c 行中就不能凑成连续数了。

$b-1$	$d+2$	c 2	$a+1$
c 1	a	b	$d+1$
$a+3$	c	d	b 3
d 1	b 2	$a+2$	$c+1$

写：a、+1、+2、+3
b、 1、 2、 3
c、+1、 2、 1
d、 1、+2、+1

图 $A16$

从图 $A16$ 右边的 a、b、c、d 各行看，它们各自同行的数已凑成连续数了【注：a 行的 $+1$，即 $a+1$；$+2$ 即 $a+2$；$+3$，即 $a+3$，其余也如此。】

如果要求图中这 16 数，是由 1 至 16 的连续数，则通过计算可得：

$a=1$，$a+1=2$，$a+2=3$，$a+3=4$，

$b=8$，$b-1=7$，$b-2=6$，$b-3=5$，

$c=11$，$c+1=12$，$c-2=9$，$c-1=10$，

$d=14$，$d-1=13$，$d+2=16$，$d+1=15$。

如果这 16 数，不限于连续数，那么选取 a、b、c、d 所加减的整数，就比较容易了，再举一例：

$b-5$	d	c	$a-6$
c	a	b	d
a	c	d	b
$d+6$	b	a	$c+5$

图 $A17$

$b-5$	$d+10$	$c+1$	$a-6$
c	a	b	d
a	c	d	b
$d+6$	$b-10$	$a-1$	$c+5$

图 $A18$

$b-5$	$d+10$	$c+1$	$a-6$
$c+3$	a	b	$d-3$
$a-4$	c	d	$b+4$
$d+6$	$b-10$	$a-1$	$c+5$

图 $A19$

由图 $A19$ 写出：a、$a-1$，$a-4$，$a-6$

b、$b+4$，$b-5$，$b-10$

c、$c+1$，$c+3$，$c+5$

d、$d-3$，$d+6$，$d+10$

由 a 行先取最小值，然后顺序取完 a 值，经计算得到：

$$a=7\quad a-1=6\quad a-4=3\quad a-6=1$$

由 b 行，取 b 的最小值，但 b 行各数值不得与 a 行的各数值重复，经计算得：

$$b=14\quad b+4=18\quad b-5=9\quad b-10=4$$

由 c 行，取 c 的最小值，但 c 行各数值，不得与 a、b 行的各数值重复，经计算得：

$$c=10\quad c+1=11\quad c+3=13\quad c+5=15$$

由 d 行，取 d 的最小值，但 d 行各数值不得与 a、b、c 行的各数值重复，经计算得：

$$d \quad 19 \quad d \quad 3-16 \quad d+6 \quad 25 \quad d+10-29$$

【也可以先由 b 行，取 b 的最小值，然后再递次取其余三个代数的最小值，余类推。】

由以上可填成图 $A20$。每行 4 数之和 $= 50$

9	29	11	1
13	7	14	16
3	17	19	18
25	4	6	15

图 $A20$

填图常用的一些公式的讨论

我们用等差数列公式求得：

$$S_{16} = \frac{(a_1 + a_{16})16}{2} \qquad ⑯$$

又用通项公式

$$a_{16} = a_1 + 15d \qquad ⑰$$

上二式中，S_{16} 是 16 个等差列数之和，a_1 是 16 个等差列数中最小数，a_{16} 是最大数，d 是公差数

$$因\ S_{16} = 4y_4，得到\ y_4 = \frac{S_{16}}{4} \qquad ⑱$$

以 ⑯ 代入 ⑱ 整理得：$y_4 = 2(a_1 + a_{16})$ ⑲

如果取 y_4 的最小【正整数】值，则 $a_1 = 1$，$a_{16} = 4^2$，得到 $y_4 = 34$；如果取 $y_4 \geqslant 34$ 时，显然可写成：

$$y_4 = 2(1 + 4^2) + k \qquad ⑳$$

$$k = 0,1,2,3,\cdots\cdots$$

由于我们已取得了由 1 至 16 的连续数的填数依据，那么凡取

$y_4 > 34$ 的一切整数，都可通过计算并依图 $A16$ 去填成，举例如下：

要求填一个 $y_4 = 37$ 的方形图

因为 $4 \times (37 - 34) = 12$，这就是说，要求填一个图，其 16 数之和比 1 至 16 连续数之和多 12，显然只要将较大的 12 个连续数，每个增加 1 就成了，因此很容易得到这 16 个数字是 1 至 4 与 6 至 17 的连续数，这时只须把上例的 b、c、d 值各增加 1，它们就凑成 6 至 17 的连续数了，然后比照图 $A16$ 去填就是 $y_4 = 37$ 的方形图了。由此得知，凡填 y_4 大于 34 的方形图，都可按这方法通过计算去填。

第五节　36 格图每行 6 数之和都相等的填数法

取 $n = 6$，得到 $n^2 = 36$，即讨论 36 格方形图的填法。

设这个 36 格方形图，每行 6 数之和为 y_6，外层行相对称的二数之和为 z【斜行则相对的二角格】又中间 16 格，每行四数之和仍为 y_4，中心四格【即 a、b、c、d】数字之和为 R，【在本章第四节中已得证 $R = y_4$ 即⑮式】由于二个对称数之和为 z，故得到：

$$y_6 = y_4 + z$$

为方便计算起见，将 36 格图的横行取代号为甲、乙、丙、丁、戊、己，直行取代号为子、丑、寅、卯、辰、巳，如图 $A21$。

	子	丑	寅	卯	辰	巳
甲						
乙						
丙						
丁						
戊						
己						

图 $A21$

从图 A21 看，(乙 + 丙 + 丁 + 戊) + (丑 + 寅 + 卯 + 辰) − $6y_6$

$= 4y_4 - $（外层四角格）$= 2y_6$ ㉑

取 $4y_4 -$（外层四角格）$= 2y_6$

移项得：$4y_4 - 2y_6 =$（外层四角格） ㉒

又因 $y_6 = y_4 + z$ ㉓

将㉓二边同时乘 2 得到 $2y_6 = 2y_4 + 2z$

移项：$2z = 2y_6 - 2y_4$ ㉔

又因外层四角格之和 $= 2z$ ㉕

以㉕代入㉒得：$4y_4 - 2y_6 = 2z$ ㉖

以㉔代入㉖得：$4y_4 - 2y_6 = 2y_6 - 2y_4$

整理得 $y_6 = \frac{3}{2}y_4$ ㉗

以㉗代入㉓得：$\frac{3}{2}y_4 = y_4 + z$

这就是说，外层四角格之和等于中心四格之和，也等于中间 16 格每行四数之和

即 $2z = y_4 = R$ ㉘

根据本章第四节讨论 16 格方形图填写的道理，并假设这 36 格方形图中 36 个数字取 1 至 36 的连续数，也可由等差数列公式得到：

$S_{36} = 18(1 + 36)$

又因，$S_{36} = 6y_6$

故得到 $y_6 = 3(1 + 36) = 111$，并将代入㉗式得到

$R = 111 \times \frac{2}{3} = 74$；同理，36 格方形图的一切 R 值都由下式取：

$R = 2(1 + 6^2) + k$ ㉙

因为 $y_6 = \frac{3}{2}R$，故 k 的取值，只有为 2 所整除时，y_6 才是整数，即

$k = 0, 2, 4 \cdots\cdots$

只要我们掌握了以上 y_4、y_6、R、z 几个数的互相关系,则不论是先确定哪一数,都可以求出其余的数值,根据这些数值,再选出这 36 个数字,然后,才可以填图。如果我们确定 36 格方形图中心四数之和【即 R】为 80,就可以通过计算而选出这 36 个数字,演算如下:

已知　$R = 80$ ㉚

引用⑯式　$S_{16} = \frac{(a_1 + a_{16})16}{2}$ ㉛

又引用⑰式　$a_{16} = a_1 + 15d$ ㉜

如取连续数,则令 $d = 1$,

又因 $y_4 = R$,得到:$S_{16} = 4R = 4 \times 80 = 320$ ㉝

由㉛㉜㉝解得:$a_1 = 12$ 时,余数 8

又以 $a_1 = 12$ 代入㉜得 $a_{16} = 27$

因此得到,这图中间 16 个数如取 12 至 27 的连续数时,则 S_{16}【指图中间 16 数之和】为 312;但因 $320 - 312 = 8$,故只须将后边 8 个连续数,每数加 1,即取为 12 至 19 与 21 至 28 的连续数。

又以㉚代入㉘得到 $z = 40$

这时,我们再分析一下,如果外围 20 格的数字每数都大于中间 16 格的最大数,或每数都小于中间 16 格的最小数,这实际不可能,因为大于 28 的二个最小数之和已大于 40,小于 12 的二个最大数之和小于 40,即

$$29 + 30 > 40$$

$$11 + 10 < 40$$

故知,z 必然等于一个大数【大于 28】加一个小数【小于 12】,也就是这 20 个数字,有 10 个大于 28,有 10 个小于 12,于是可以得到这些数字是由 1 至 10 与 30 至 39【或 2 至 11 与 29 至 38】的连续数。

现在我们令　$2v = z$　得到 $v = 20$

因大数 + 小数 = $2v$

为计算方便：令大数 $\quad$ 小数 $- 2t$

于是得到：大数 $= v + t$

$\qquad\qquad$ 小数 $= v - t$

再令：$v + t = 30, 31, 32, \cdots\cdots 39$

$\qquad v \quad t \quad 10, 9, 8, \cdots\cdots 1$

得到 $\quad t = 10, 11, 12, 13, \cdots\cdots 19$

现在先从外边 20 格填起，可仿本章第一节讨论方法，在 10 至 19 中，选出 6 个数分为二组，每组之和相等，做为上横行 6 数，经计算选得：

$$10 + 14 + 15 = 39 \quad (一组)$$

$$12 + 11 + 16 = 39 \quad (二组)$$

剩下四数，也分为二组，每组数字之和不要相等，做为左直行中间四数，选得：

$$13 + 18 = 31 \quad (一组)$$

$$17 + 19 = 36 \quad (二组)$$

因上二组之差【即 36 − 31】等于 5，所以要从已选取为上横行的二组数中，选其中一组，有二数之差等于 5 的，将这二数填在上横行的角格，现选得第一组的 10 与 15【也可选第二组的 11 与 16】填写时，也要以相同数字【但符号相反】填入对称格，即如图 *A22*。

$v \quad 15$	$v \quad 14$	$v + 11$	$v + 12$	$v + 16$	$v - 10$
$v \quad 13$					$v + 13$
$v \quad 18$					$v + 18$
$v + 19$					$v - 19$
$v + 17$					$v \quad 17$
$v + 10$	$v + 14$	$v - 11$	$v - 12$	$v \quad 16$	$v + 15$

图 *A22*

至于中间 16 格【即由 12 至 19 与 21 至 28 的连续数】取本章第

四节填 16 格方形图【即图 $A16$】为依据去填写，即：

$b-1$	$d+2$	$c-2$	$a+1$
$c-1$	a	b	$d+1$
$a+3$	c	d	$b-3$
$d-1$	$b-2$	$a+2$	$c+1$

令：a、$a+1$、$a+2$、$a+3$ 为 12、13、14、15

b、$b-1$、$b-2$、$b-3$ 为 19、18、17、16

c、$c-1$、$c-2$、$c+1$ 为 23、22、21、24

d、$d+1$、$d+2$、$d-1$ 为 26、27、28、25

可是可比照填写成图 $A23$，每行 6 数之和等于 120

5	6	31	32	36	10
7	18	28	21	13	33
2	22	12	19	27	38
39	15	23	26	16	1
37	25	17	14	24	3
30	34	9	8	4	35

图 $A23$

也可以由 ㉛㉜㉝ 整理得：

$320 = (2a_1 + 15d)8 \Rightarrow 40 = 2a_1 + 15d$

解得：$a_1 = 5, d = 2$

即中间 16 数为：5，7，9，11，13，15，17，19，21，23，25，27，29，31，33，35。

再依照图 $A16$，对应填成图 $A24$。

17	35	21	7
23	5	19	33
11	25	31	13
29	15	9	27

图 $A24$

同样方法，令：

$v+t=$ 22，24，26，28，30，32，34，36，37，38，39，

$v-t=$ 18，16，14，12，10，8，6，4，3，2，1，

得到 $t = 2,4,6,8,10,12,14,16,17,18,19$,

在 t 中,选取:$2+4+18=24$　(一组)

$6+8+10=24$　(二组)

再选取:$19+17=36$　(一组)

$16+12=28$　(二组)

计算后填得图 $A25$。

$v-6$	$v-8$	$v-10$	$v+18$	$v+4$	$v+2$
$v-16$					$v+16$
$v-12$					$v+12$
$v-19$					$v-19$
$v+17$					$v-17$
$v-2$	$v+8$	$v+10$	$v-18$	$v-4$	$v+6$

图 $A25$

最后填成图 $A26$

14	12	10	38	24	22
4	17	35	21	7	36
8	23	5	19	33	32
39	11	25	31	13	1
37	29	15	9	27	3
18	28	30	2	16	26

图 $A26$

从以上 $y_4=2(n^2+1)+k$ 与取 y_6 时,其 $R=2(6^2+1)+k$,于是可以得到

$$R=2(n^2+1)+k \tag{34}$$

因此,凡填 n^2 格的方形图时,它们的 R 值都可由 ㉞ 式计算得到,但 k 值只取偶数。

为了使读者更易理解,再举一个填 8^2 格方形图例。

即要求填一个 64 格方形图，其中心四数之和为 132。

解：可分为两步填：

1. 已知 $R = 132$， $n = 8$

以已知数填入㉞式：$132 = 2(8^2 + 1) + k$，得到：$k = 2$，是个偶数，得知由已知数可以填图。

因 S_{16}【指中间 16 数之和】等于 $4R$，得到 528，以 $S_{16} = 528$，代入⑯式得：

$$528 = \frac{(a_1 + a_{16})16}{2}$$

又以 $a_{16} = a_1 + 15d$ 【$d = 1$】代入上式得：

$$528 = \frac{(2a_1 + 15)16}{2}$$

解上式得：$a_1 = 25$ $a_{16} = 40$ 余数 8

这就是说，中间 16 数如取为 25 至 40 至的连续数，其和比要求的 528 还少 8，因此，只要将这 16 个连续数中较大的 8 数，每数加 1，即：

25 至 32 与 34 至 41 的连续数 ㉞

2. 现在再取周围 48 格的数字。以中间 16 格为中心，外边每加一层时，即每行所增加的二数之和都相等，【只有这样，每行数字之和才相等】已知这二数之和为 z，以 $R = 132$ 代入㉘式得：

$z \doteq 66$

根据本章第五节的道理，这 48 格数字，有 24 数大于 41，有 24 数小于 25，故知小数必是由 1 至 24 的连续数，因大小二数之和等于 66，故大数必是由 42 至 65 的连续数。

先填图的外二层，仿本章第五节方法， 得到：

令 $v = \frac{1}{2}z$ 得到 $v = 33$

令 $v \pm t = 1$ 至 24 与 42 至 65 的连续数

于是得到 $t = 32, 31, 30, \cdots\cdots 9$。

从外层格填起，在 9 至 32 连续数中，选取 8 数分为二组，每组之和相等，做为上横行 8 数【均指 t 值】经计算选得：

26，27，30，31　四数为(一组)

25，28，32，29　四数为(二组)

再选 6 数分为二组，每组之和不要相等，每组数字个数也可不必相等做为左直行中间 6 数，选得：

11，22，23，24 四数之和为 80(一组)

10，12，二数之和为 22(二组)

因 $80 - 22 = 58$，所以要从已选做为上横行的二组中看这一组中哪一数与另一组中的一数之和等于 58【因为 58 数值较大，没有间在一组中二数之差可取】就将这二数填在上横行的左右角格中，现选得这二数是 32 与 26【或 28 与 30 也可】于是可填成图 24，现在剩下的 t 值是 9，13，14，15，16，17，18，19，20，21，也将它们用同样方法选填在第二层格。

在这 10 数中，选出 6 数，分为二组每组数字之和相等，做为第二层上横行 6 数，经计算选得：

9，20，21　三数为(一组)

16，15，19　三数为(二组)

剩下的 13，18，14，17 也分为二组，做为第二层左直行中间四数，选得：

14，18，17　三数之和等于 49 为一组

13　单独为一组

因 $49 - 13 = 36$，所以要从上横行二组中，取出每组一数，而这二数之和等于 36，将这二数填在上横行的角格，这二数是 20 与 16，【或 21 与 15 也可】于是填成图 $A28$。

$v+32$	$v-31$	$v+29$	$v-30$	$v+28$	$v-27$	$v+25$	$v-26$
$v-11$							$v+11$
$v-22$							$v+22$
$v-23$							$v+23$
$v-24$							$v+24$
$v+10$							$v-10$
$v+12$							$v-12$
$v+26$	$v+31$	$v-29$	$v+30$	$v-28$	$v+27$	$v-25$	$v-32$

图 $A27$

	$v+20$	$v+21$	$v+9$	$v-15$	$v-19$	$v-16$	
	$v-14$					$v+14$	
	$v-17$					$v+17$	
	$v-18$					$v+18$	
	$v+13$					$v-13$	
	$v+16$	$v-21$	$v-9$	$v+15$	$v+19$	$v-20$	

图 $A28$

再填中间 16 格，可按图 $A16$。

将$a,a+1,a+2,a+3$ 计算为：25，26，27，28，

$b,b-1,b-2,b-3$ 计算为：32，31，30，29，

$c,c-1,c-2,c+1$ 计算为：36，35，34，37，

$d,d+1,d+2,d-1$ 计算为：39，40，41，38，

最后可填成图 $A29$，每行 8 数之和等于 264

65	2	62	3	61	6	58	7
22	53	54	42	18	14	17	44
11	19	31	41	34	26	47	55
10	16	35	25	32	40	50	56
[illegible]	15	28	36	39	29	51	57
4[illegible]	46	38	30	27	37	20	23
45	49	12	24	48	52	13	21
59	64	4	63	5	6	8	1

图 $A29$

附:几个较多格图填数图例

$a-1$, b 100, c 117, d 10

y_{10} 570, $R-228$, V 57

$V+21$	$V+29$	$V+44$	$V+34$	V 22	V 23	V 24	V 32	V 52	$V+25$
$V+36$	$V+6$	V 1	V 7	V 20	V 27	$V+2$	$V+39$	$V+8$	V 36
$V-37$	$V+$ [illegible]	V 15	V 14	$V+11$	$V+12$	$V+16$	V 10	$V-3$	$V-37$
$V+5$[illegible]	$V-5$	V 13	b 1	$d+2$	c 2	$a+1$	$V+13$	$V-5$	$V-50$
$V+26$	$V+38$	V 18	c 1	a	b	$d+1$	$V+18$	V 38	V 26
[illegible] 28	V 4	$V+19$	$a+3$	c	d	b 3	V 19	$V+4$	$V+28$
V 33	V 9	$V+17$	d 1	b 2	$a+2$	$c+1$	V 17	$V+9$	$V+33$
$V-35$	V 3[illegible]	$V+10$	$V+14$	V 11	V 12	V 16	$V+15$	$V+31$	$V+35$
$V-49$	V 8	$V+1$	$V+7$	$V+20$	$V+27$	V 2	V 39	V 6	$V+49$
V 25	V 29	V 44	V 34	$V+22$	$V+23$	$V-24$	$V+32$	$V+52$	V 21

图 $A30$

78	86	101	91	35	34	33	25	5	82
93	63	56	50	37	30	59	96	65	21
14	60	42	43	68	69	73	47	54	20
107	62	44	99	12	115	2	70	52	7
83	95	39	116	1	100	11	75	19	31
29	53	76	4	117	10	97	38	61	85
24	48	74	9	98	3	118	40	66	90
22	26	67	71	46	45	41	72	88	92
8	49	58	64	77	84	55	18	51	106
32	28	13	23	79	80	81	89	109	36

图 $A31$

$y = 189 \qquad E = 27$

$E+14$	$E+11$	$E+21$	$E-20$	$E-25$	$E-17$	$E+16$
$E-18$	$E+2$	$E-1$	$E-3$	$E+6$	$E-4$	$E+18$
$E-12$	$E-5$	$E-7$	$E-8$	$E+15$	$E+5$	$E+12$
$E-13$	$E+9$	$E+22$	E	$E-22$	$E-9$	$E+13$
$E+19$	$E-10$	$E-15$	$E+8$	$E+7$	$E+10$	$E-19$
$E+26$	$E+4$	$E+1$	$E+3$	$E-6$	$E-2$	$E-26$
$E-16$	$E-11$	$E-21$	$E+20$	$E+25$	$E+17$	$E-14$

图 $A32$

41	38	48	7	2	10	43
9	29	26	24	33	23	45
15	22	20	19	42	32	39
14	36	49	27	5	18	40
46	17	12	35	34	37	8
53	31	28	30	21	25	1
11	16	6	47	52	44	13

图 $A33$

奇(m^2)格数方形图由连续数填成(例)

E + 42	E + 41	E + 43	E + 44	E + 45	E + 46	E − 51	E − 52	E − 53	E − 55	E − 50
E + 47	E − 28	E + 25	E + 26	E + 27	E + 29	E − 34	E − 35	E − 36	E − 30	E − 47
E + 18	E + 31	E + 14	E + 19	E + 16	E − 24	E − 23	E − 22	E + 20	E − 31	E − 48
E + 49	E + 32	E − 21	E + 12	E − 7	E − 9	E − 8	E + 10	E + 21	E − 32	E − 49
E − 54	E + 33	E − 18	E + 11	E + 1	E + 2	E − 3	E − 11	E + 13	E − 33	E − 54
E − 6	E − 37	E + 13	E − 7	E − 4	E	E + 4	E + 7	E − 13	E + 37	E + 56
E − 27	E − 38	E + 1	E − 6	E + 3	E − 2	E − 1	E − 6	E − 15	E + 38	E + 57
E − 58	E − 39	E + 17	E − 10	E + 5	E + 9	E + 8	E − 12	E − 17	E − 39	E − 58
E − 59	E − 40	E − 20	E − 19	E − 16	E + 24	E + 23	E + 22	E − 14	E + 40	E + 59
E − 60	E − 30	E − 25	E − 26	E − 27	E − 29	E + 34	E + 35	E + 36	E − 28	E + 60
E + 50	E − 41	E − 43	E − 44	E − 45	E − 46	E + 51	E + 52	E + 53	E + 55	E − 42

图 $A34$

以上 $m=3,5,7,\cdots$ $E\geqslant\frac{m^2+1}{2}$

偶(n^2)格数方形图，由 1 至 n^2 连续数填成(例)

V + 45.5	V + 37.5	V + 46.5	V + 34.5	V − 40.5	V − 35.5	V − 38.5	V − 43.5	V − 42.5	V + 36.5
V + 32.5	V + 29.5	V + 28.5	V + 21.5	V − 31.5	V − 30.5	V − 18.5	V − 19.5	V + 20.5	V − 32.5
V + 33.5	V + 22.5	V + 10.5	V + 9.5	V + 17.5	V − 12.5	V − 13.5	V − 11.5	V − 22.5	V − 33.5
V + 48.5	V + 23.5	V − 8.5	b − 1	a + 2	c − 2	a + 1	V + 8.5	V − 23.5	V − 48.5
V + 49.5	V + 24.5	V − 14.5	c − 1	a	b	d + 1	V + 14.5	V − 24.5	V − 49.5
V − 39.5	V − 25.5	V − 15.5	a + 3	c	d	b − 3	V + 15.5	V + 25.5	V + 39.5
V − 41.5	V − 26.5	V + 16.5	d − 1	b − 2	a + 2	c + 1	V − 16.5	V + 26.5	V + 41.5
V − 44.5	V − 27.5	V + 11.5	V − 9.5	V − 17.5	V + 12.5	V + 13.5	V − 10.5	V + 27.5	V + 44.5
V − 47.5	V − 20.5	V − 28.5	V − 21.5	V + 31.5	V + 30.5	V + 18.5	V + 19.5	V − 29.5	V + 47.5
V − 36.5	V − 37.5	V − 46.5	V − 34.5	V + 40.5	V + 35.5	V + 38.5	V + 43.5	V + 42.5	V − 45.5

图 $A35$

以上 $n=6,8,10,\cdots$ $V=\frac{n^2+1}{2}$

中间 16 数是由 $a_1=\frac{n^2}{2}-\frac{4^2}{2}+1$ 至 a_{16}。

当 $n=6$ 时，中间16数由11至26至的连续数；

当 $n=8$ 时，中间16数由25至40的连续数；

当 $n=10$ 时，中间16数由43至58的连续数。

其余按上式类推。

$a=a_1, a+1=a_2, a+2=a_3, a+3=a_4$，

$b=a_8, b+1=a_7, b+2=a_6, b+3=a_5$，

$c=a_{11}, c+1=a_{12}, c+2=a_9, c+1=a_{10}$，

$d=a_{14}, d+1=a_{13}, d+2=a_{16}, d+1=a_{15}$。

习　　题

1. 请用不同数字【王整数】填入 A 题1、A 题2、A 题3图，使不论是直行、横行、斜角行每行数字之和都相等【以下2至9题同】。



图 A 题1

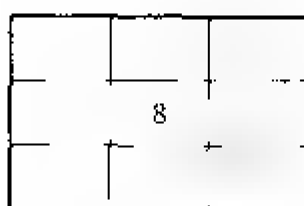


图 A 题2

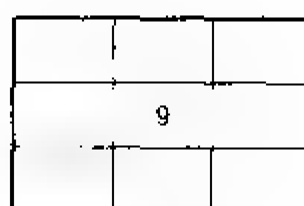


图 A 题3

要求：图 A 题1中9个数字是连续数；

图 A 题2中9个数字中最大数取最大值；

图 A 题3中9个数字中最小数取最大值；

2. 用一个等差数列填入9格的方形图，图中最大数加最小数之和等于80，并且最小数取最小值。

3. 填一个9格的方形图，图中数字之和等于135。

4. 已确定9格方形图，中心格数字是9，图中最大数取最大值，并由它所组成的一切数组，分别画图填数。

5. 用一个公差数最大的等差数列填一个25小格的方形图，但要求图中的最大数加最小数之和等于60。

6. 已知两个不同小方格数，但都是奇格数的方形图，两图中

心格的数字都是 24，请分别画图填数。

7. 填一个 16 小方格的方形图，要求图外层数字之和等于 114。

8. 填一个小格数是奇数和另一个小格数是偶数的方形图，要求每图的数字之和都等于 500。

9. 已知一个 16 小方格的方形图，图中数字之和的 2 倍等于另一个 25 小方格的方形图图中数字之和的 3 倍，要求符合这个条件的图的数字之和是最小值，并且各图的数字都是连续数，请分别填写出来。

10. 要求在六边形图中【图 A 题 4】，每个交点填上不同数字，使外层六个顶角数字之和与内层六个顶角数字之和都相等，同时使三行顶角线，每行 5 数之和与六个大三角形边上 5 个数字之和都相等。

11. 要求在六边形图中【图 A 题 5】，每个交点上填上不同数字，使不论是横行、直行、斜行，每行三数之和都相等。

12. 要求用七个不同数字填三圈图【图 A 题 6】，使每个圆圈内四数之和都相等。

13. 要求用六个不同的较小数字填入三圈图【图 A 题 7】，使每个圆圈内三数之和都相等。用六个连续数填图，使每个圆圈内三数之和等于 20。

14. 要求用 1 至 10 的连续数填三圆圈图【图 A 题 8】，使每个圆圈内六数之和都相等。用 10 个连续数填图，使每个圆圈内六数之和等于 58。又用 10 个数字之和等于 70 填图，使每个圆圈内六数之和都等于 44。

15. 要求用 1 至 11 的连续数填四圆圈图【图 A 题 9】，使每个圆圈内六数之和都相等。用 11 个连续数填图，使每个圆圈内数字之和等于 40。又用 11 个数字之和等于 200 填图，使每个圆圈内六数之和都相等。再填一个每圈六数之和为 113 的图，图内 11 数之和

仍等于200。

16. 要求用1至12的连续数填入四圆圈图【图A题10】,使每个圆圈内六数之和都相等。再填每一个圆圈内六数之和等于50。【这12个数字不必成连续数】

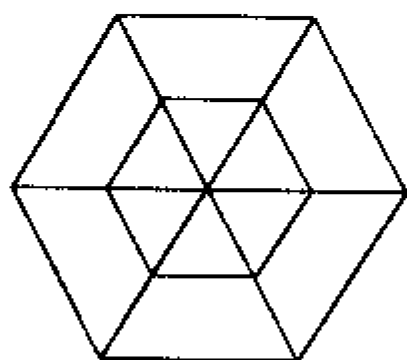
17. 要求在五角星图中,【图A题11】按黑点填上不同数字,使不论是横行、斜行每行五数之和、顶角五数之和,交叉点五数之和、中间【即每行中间数字】五数之和都相等。

18. 要求在六角形图中,【图A题12】每个交点填上不同数字,使不论是横行、斜行每行四数之和都相等。

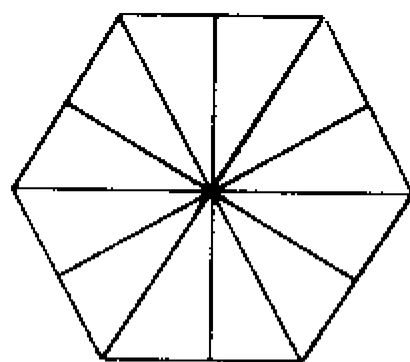
19. 要求在六角形图中,【图A题13】,每个交点填上不同数字,使不论是横行、直行、斜行、对顶角行每行五数之和都相等。

20. 要求在八角形图中【图A题14】,每个交点填上不同数字,使不论是横行、直行、斜行每行四数之和都相等。

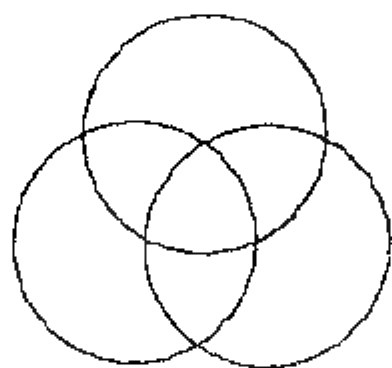
21. 要求在八角形中【图A题15】,每个交点填上不同数字,使不论是直行、横行、斜行、对顶角行每行五数之和都相等。

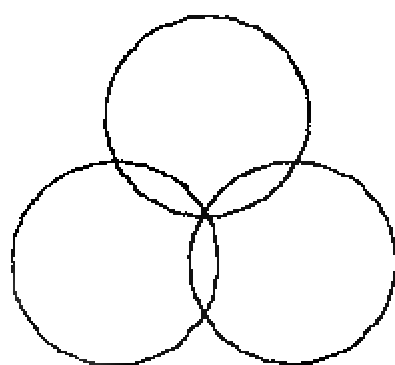


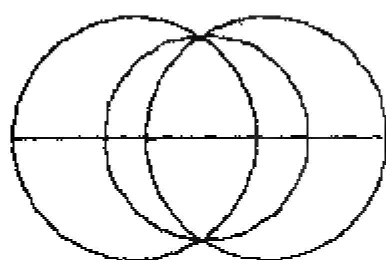
图A题4

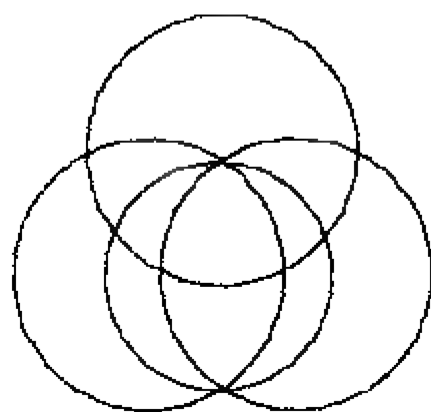


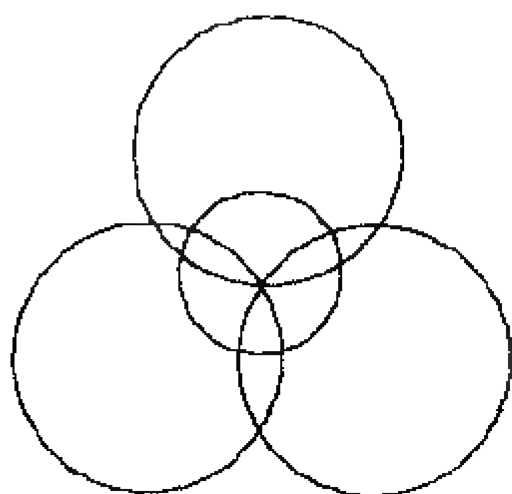
图A题5

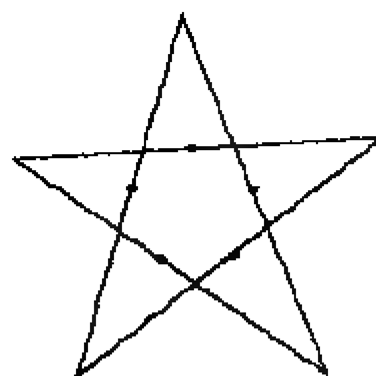

图 A 题 6


图 A 题 7


图 A 题 8


图 A 题 9


图 A 题 10


图 A 题 11

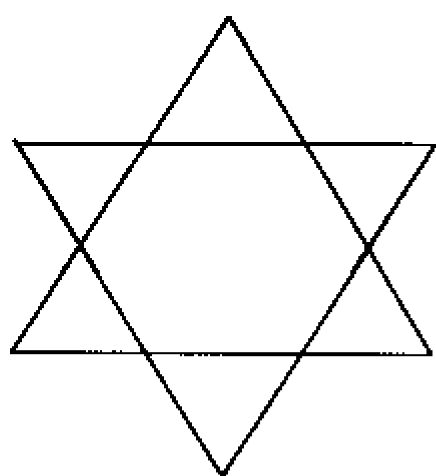


图 A 题 12

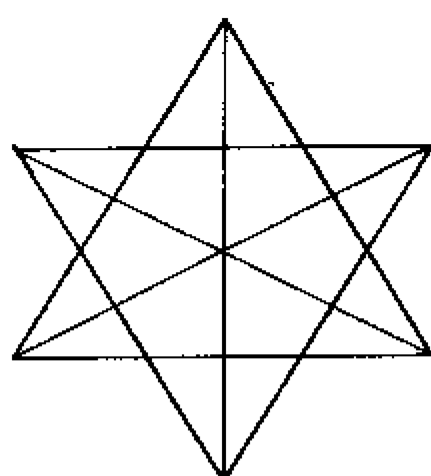


图 A 题 13

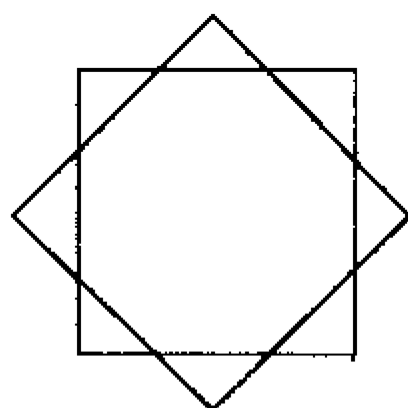


图 A 题 14

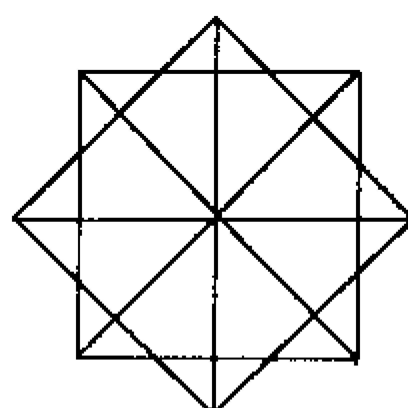


图 A 题 15

第十五章　方形图每行数字之积都相等的填数法

第十四章所讲的方形图填数法，是要求每行数字之和都相等，本章则要求每行数字之积都相等，那么，它的填法又是如何呢？下面分别举例分析。

第一节　9格图每行3数之积都相等的填数法

在图 B1 中，设 E 为图的中心数字，z 是以 E 为中心每 2 个对

称数之积，y 是每行 3 数之积。

由题意可得：

	E	

图 $B1$

$$y = Ez \quad (1)$$

$$y^3 = Ez^4 \quad (2)$$

以(1)式代入(2)式：

$$(Ez)^3 = Ez^4$$

整理得：$E^2 = z$

将其代入(1)式：$y = E^3$

故二个对称数之积等于 E^2，每行 3 数之积等于 E^3。

其计算法是：

先选用二个分数，使其满足连乘等于 1，将图【图 $B1$】每一格都写上 E，将这二个分数分别写在上横行格内 E 的前面，再将这二个分数颠倒母子后【就是说，这二个对称数，其中一个乘这个分数，另一个则除以这个分数，使其仍等于二个 E 自乘，分数除法是将除数颠倒母子变为乘】乘 E 后填入对称格中，使斜角行 3 数之积仍等于 E^3，然后就很容易求出左右直行的中间数，如以下三图：

$\frac{1}{3}E$	$\frac{3}{2}E$	$2E$
$6E$	E	$\frac{1}{6}E$
$\frac{1}{2}E$	$\frac{2}{3}E$	$3E$

图 $B2$

$\frac{2}{3}E$	$\frac{1}{2}E$	$3E$
$\frac{9}{2}E$	E	$\frac{2}{9}E$
$\frac{1}{3}E$	$2E$	$\frac{3}{2}E$

图 $B3$

$\frac{5}{7}E$	$7E$	$\frac{1}{5}E$
$\frac{7}{25}E$	E	$\frac{25}{7}E$
$5E$	$\frac{1}{7}E$	$\frac{7}{5}E$

图 $B4$

将图中的分母通分，求出最小公倍，就是 E 的最小值，分别乘图 $B2$，图 $B3$，图 $B4$ 各分数【包括整数】；可得到图 $B5$，图 $B6$，图

$B7$,【为省略起见，以后图中只写分数，不写连带的 E】。

2	9	12
36	6	1
3	4	18

图 $B5$

每行 3 数之积 $= 6^3$

12	9	54
81	18	14
6	36	27

图 $B6$

每行 3 数之积 $= 18^3$

125	1225	35
49	175	625
875	25	245

图 $B7$

每行 3 数之积 $= 175^3$

由上得知，9 格图有 4 对对称数，每对之积相等，且都等于 E^2，反过来说，就是要符合

$$E^2 = ab = cd = ef = gh$$

这个条件，否则不能填图，如以上图 $B5$

$$6^2 = 36 = 3\times 12 = 2\times 18 = 4\times 9 = 1\times 36$$

其中 $ab = cd = ef = gh$ 就是以下分数：$\frac{1}{2},\frac{2}{1} = \frac{1}{3},\frac{3}{1} = \frac{2}{3},\frac{3}{2} = \frac{1}{6},\frac{6}{1}$。【这些分数要以 6 乘之】它们如减去颠倒母子后的分数，就是 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{6}$ 四个分数。

如能掌握整数求取此种“分数”的方法，对填好方形图，是有很大帮助的，为此特将这个方法【暂叫“整数求 T 法”】分析如下：

首先将这个整数分解出所有的因数，然后以这些因数为分母，第一个分子为 1，以后的分子是前项的分母，这样由小到大，直至用完这些因数为止，如遇到这分数与前面的相同，即舍掉不要，举例如下：

例如整数 12，即

$$\begin{array}{r|l} 2 & 12 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline & 3 \end{array}$$

它的因数有：2，3，4，6，12。【不算 1】先取 2 为分母，它的分子为 1，即 $\frac{1}{2}$，再取第二个分数，以 3 为分母，第一个分子为 1，即 $\frac{1}{3}$；

因前面有 $\frac{1}{2}$，故取其分母 2 为第二个分子，即 $\frac{2}{3}$；又取第三个分数，以 4 为分母，第一个分子为 1，即 $\frac{1}{4}$；它的前面有 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，但不取 2 为分子，因为 $\frac{2}{4}$ 就是 $\frac{1}{2}$，它和第一个分数相重，故应舍掉，取 3 为分子，即 $\frac{3}{4}$；又取第四个分数，以 6 为分母，第一个分子为 1，即 $\frac{1}{6}$；前面的分母 2，3，4 都不能取，因为 $\frac{2}{6}$ 就是 $\frac{1}{3}$，$\frac{3}{6}$ 就是 $\frac{1}{2}$，$\frac{4}{6}$ 就是 $\frac{2}{3}$，它们都重复了，故都要舍掉，再取最后一个 $\frac{1}{12}$，所以 12 总共有 7 个"分数"，即 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{12}$，这就是说，将 12^2 分解为每次都不相同的二个因数，总共有 7 次。

为了容易选取和适应以后填更多格方形图的需要起见，特编制《方形图中心数字表》【以下均简称"表"】【附表在书末】。

一、整数求"T"法　求"T"公式

具有 4 个或 4 个以上"分数"的整数 E，可选为 9 格方形图的中心数字；

具有 12 个或 12 个以上"分数"的整数 E，可选为 25 格方形图的中心数字；

具有 24 个或 24 个以上"分数"的整数 E，可选为 49 格方形图的中心数字；

由此得到：

m^2 小格的方形图的中心数字 E 的"T" $\geqslant \frac{m^2-1}{2}$【$m$ 是奇数】。

根据表提示和推理求证，得出部分公式如下：设表中的"分数"为 T，P 为素数，

$n = 0,1,2,3,\cdots,n$，　$t = 1,2,3,\cdots,t$。

1. P_0^t 的 $T = t$

2. ∵ P_0P_1 的 $T = 3^0 + 3^1 = 4$

$P_0P_1P_2$ 的 $T = 3^0 + 3^1 + 3^2 = 13$

$P_0P_1P_2P_3$ 的 $T = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 = 40$

……………………………………

∴ $P_0P_1 \cdots P_n$ 的 $T = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n$

3. ∵ P_0P_1 的 $T = 3^0 + 3^1 \times 1 = 4$

$P_0P_1^2$ 的 $T = 3^0 + 3 \times 2 = 7$

$P_0P_1^3$ 的 $T = 3^0 + 3 \times 3 = 10$

……………………………

∴ $P_0P_1^t$ 的 $T = 3^0 + 3t = 1 + 3t$

4. ∵ $P_0P_1P_2$ 的 $T = 3^0 + 3^1 + 3^2 \times 1 = 13$

$P_0P_1P_2^2$ 的 $T = 3^0 + 3^1 + 3^2 \times 2 = 22$

$P_0P_1P_2^3$ 的 $T = 3^0 + 3^1 + 3^2 \times 3 = 31$

$P_0P_1P_2^4$ 的 $T = 3^0 + 3^1 + 3^2 \times 4 = 40$

……………………………

∴ $P_0P_1P_2^t$ 的 $T = 3^0 + 3^1 + 3^2 t = 1 + 3 + 3^2 t$

5. ∵ $P_0P_1P_2P_3$ 的 $T = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 \times 1 = 40$

$P_0P_1P_2P_3^2$ 的 $T = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 \times 2 = 67$

$P_0P_1P_2P_3^3$ 的 $T = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 \times 3 = 94$

……………………………

∴ $P_0P_1P_2P_3^t$ 的 $T = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 t$

6. ∵ $P_0P_1^t$ 的 $T = 1 + 3t$

$P_0P_1P_2^t$ 的 $T = 1 + 3 + 3^2 t$

$P_0P_1P_2P_3^t$ 的 $T = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 t$

…………………………

∴ $P_0P_1P_2P_3P_4P_5 \cdots P_n^t = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n t$

7. 如果已知整数 A 有 4 个 T，且 $A = P_0P_1$

则　A' 的 $T-1$ 至 i 的连续数之和 $\times 4$；

如果已知整数 B 有 7 个 T，且 $B = P_0P_1^2$，

则　B 的 $T-1$ 至 i 的连续数之和 $\times 7 + 1$ 至 $(i-1)$ 的连续数之和；

当　$P_0^iC = P_0^{i-1} \times P_0C$ 时，

若　P_0C 的 T 为 x，C 的 T 为 y，

则　P_0^iC 的 $T = x + (x - y)(i - 1)$　条件是 C 不含 P_0，$i > 1$。

任一整数，都可运用以上各公式，求出它有多少个 T，现为简便起见，例如以 $P_0P_1^2$ 代表 $P_0P_1^2$ 的 T，以 $P_0^2P_1P_2^3$ 代表 $P_0^2P_1P_2^3$ 的 T……

又在公式 7 中，以 P_0^iC 代表 P_0^iC 的 T，C 代表 C 的 T，P_0C 代表 P_0C 的 T

即公式 7：$P_0^iC = P_0C + (P_0C - C)(i - 1)$

适合条件是：　　C 不含 P_0　$i > 1$。

例一　求 $P_0^5P_1^3P_2$ 有多少个 T？

解：由上式和公式 7 有：

$P_0^4 \times P_0P_1^3P_2 = P_0P_1^3P_2 + (P_0P_1^3P_2 - P_1^3P_2) \times 4$　　①

又由 $P_0P_1^3P_2$ 和公式(7)有：

$P_1^2 \times P_1P_0P_2 = P_1P_0P_2 + (P_1P_0P_2 - P_0P_2) \times 2$　　②

∵　$P_1P_0P_2 = 1 + 3 + 3^2 = 13$，　$P_0P_2 = 1 + 3 = 4$　　③

以③代入②式得：$P_0P_1^3P_2 = 13 + (13 - 4) \times 2 = 31$　　④

∵　$P_1^3P_2 = 1 + 3 \times 3 = 10$　　⑤

以④⑤式代入①式得：

$P_0^5P_1^3P_2 = 31 + (31 - 10) \times 4 = 115$。

答：$P_0^5P_1^3P_2$ 有 115 个 T。

例二　求 $P_0P_1^2P_2^2$ 有多少个 T？

解：由上式和公式(7)有：

$P_0P_1^2P_2^2 = P_2 \times P_2P_0P_1^2 = P_2P_0P_1^2 + (P_2P_0P_1^2 - P_0P_1^2) \times 1$　　①

∵ $P_2P_0P_1^2=1+3+3^2\times 2=22$，$P_0P_1^2=1+3\times 2=7$ ⑦

以⑦式代入⑥式得：$P_0P_1^2P_2^2=22+(22-7)\times 1=37$

答：$P_0P_1^2P_2^2$ 有 37 个 T。

此外，同理可得：

$(P_0P_1)^4=40$，$(P_0P_1)^3=24$，$P_0^2P_1^3=17$，$P_0^4P_1^2=22$，

$P_0^3P_1^4=31$，$P_0^5P_1^6=71$，$P_0P_1^2P_2^3=52$，$P_0^2P_1^2P_2^2=62$

……………………………………。

表中第一栏数字和每条公式的左端都是尚未自乘的数，其实都要自乘，比如“6”有 4 个“分数”，实为 $6^2=36$ 有 4 个“分数”，又如公式 6：$P_0P_1^t$ 的 $T=1+3t$，实为 $(P_0P_1^t)^2$ 的 $T=1+3t$

如以 $P_0=3$，$P_1=2$，$t=3$，

即 $(3\times 2^3)^2=24^2=576$ 的 T 有 $1+9=10$，

即 $24^2=576=12\times 48=8\times 72=16\times 36=6\times 96$

$=18\times 32=4\times 144=3\times 192=9\times 64=2\times 288$

$=1\times 576$ 共 10 次【即 10 个 T】

运用以上公式，不但可以满足这种类型的计算结果【例如 576 能分为每次二个不同因数之积共有 10 次，那么 $(2\times 3\times 5\times 7)^2=44100$ 有多少次呢？我们用公式 2 就可以知道有 40 次】而且对填较多格方形图也很有帮助，因为表中的 E 数不多，例如我们要求填一个 100 格图，我们可以运用公式来确定这个整数，如果运用公式(4)，得到

$P_0P_1P_2^t$ 的 $T=42\leqslant 1+3+3^2t$

即 $42\leqslant 4+3^2t$

【注：$42=\frac{100-4^2}{2}$，即 100 格减去中间 16 格，剩下 84 格，需要 42 对对称数。请参阅本章第八节】

即　$38\leqslant 9t$

∴　$5\leqslant t$

如取 3 个 P 为 5、3、2 得到取整数为 $5\times3\times2^5=480$ 时，则有 49 个 T，然后再按照"整数求 T 法"把这些"分数"列出来。

又：如果要求这个整数含二个素数，即由要求和求"T"公式得到：

$P_0^aP_1^b=P_0^{a+1}\times P_1^bP_0=42$（原式）

$$42=x+(x-y)(a-1)\qquad ⑧$$

$$x=1+3b,\quad y=b\qquad ⑨$$

其中 $x=P_0P_1^b$ 的 T，$y=P_1^b$ 的 T

以 ⑨ 代入 ⑧：并整理得：

$$b=\frac{42-a}{2a+1}\qquad (A)$$

用不定方程的解法引用辗除横式进行演解【请参阅本书不定方程部分第一章第五节(二)】即：

$$42-a\quad \overset{2}{-}\ 2a+1\quad \overset{1}{\cdot}\qquad 85$$

∵$85=5\times17$ （标准分解式）

∴ 可立方程为：

$2a+1=\pm1$，没有 0 以外的正整数解，故舍去，

$2a+1=\pm5$，得到 a 的正整数解：$a=2$，

$2a+1=\pm17$，得到 a 的正整数解：$a=8$，

$2a+1=\pm85$，得到 a 的正整数解：$a=42$

以 $a=42$ 代入 (A) 式得到 $b=0$，不符合要求，故舍去，

以 $a=2$ 代入 (A) 式得到 $b=8$

以 $a=8$ 代入 (A) 式得到 $b=2$

因 a、b 可以互相交换，故得 $\begin{cases}a=2\\b=8\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=8\\b=2\end{cases}$

以 $a=2$，$b=8$ 代入原式得：$P_0^2P_1^8$

如取 $P_0=3$，$P_1=2$，得到 $P_0^2P_1^8=3^2\times2^8=2304$

故取整数 2304 时，有 42 个"T"。

二、整数求“V”表示式　“V”的排列

现在我们再讨论关于任一整数【除1以外】【前面讲的是任一整数的平方数】都可以表成二个不同因数的积。为了与上面的“T”区别开来，它的次数以“V”表示；那么这V又如何求得呢？如何排列才不会发生错漏泥？

排列的方法是：

先求出这个整数的标准分解式，并在所有的因数中，凡是等于或小于这个整数的平方根的整数部分的数【包括1】都是这个整数分解为每次等于二个不同因数中较小的一个因数，【这个较小的因数一般按次序排列在前面】但如果这整数等于平方数，则舍去这个平方根数，因为这里要求的是二个不同的因数。

“V”的求法是：【举例引证】

1. 若整数为P_0^a，则$V=\left[\frac{a+1}{2}\right]$　　表示式1

【[ ]括号内，指取其整数部分，下同】

例如$25=5^2=P_0^2$，以$a=2$代入表示式1得到P_0^2的$V=\left[\frac{(2+1)}{2}\right]=1$，即$25=1\times25$【唯有一次】又如$343=7^3=P_0^3$，以$a=3$代入表示式1得到$P_0^3$的$V=\frac{3+1}{2}=2$

$\therefore\ 343=1\times343=7\times49$【共二次】

故表示式1可由演算得证。

2. 若整数为P_0P_1，则$V=\frac{2^2}{2}=2$　　表示2

因为这整数等于二个素数之积，且每个素数都是一次方，故V的表示式的分子是2的二次方。

例如

$21=3\times7=P_0P_1$【即$21=1\times21=3\times7$　共二次】

$35=5\times7=P_1P_1$【即$35=1\times35=5\times7$　共二次】

$77 = 7 \times 11 = P_0P_1$【即 $77 = 1 \times 77 = 7 \times 11$ 共二次】

……………

它们的 V 都是：$\frac{2^2}{2} = 2$

故表示式 2 也可由演算得证。

3. 若整数为 $P_0P_1P_2$，则因为它含有三个素数，且都是一次方，同理可得 $V = \frac{2^3}{2} = 4$ 表示式 3

例如 $30 = 2 \times 3 \times 5 = P_0P_1P_2 \quad [\sqrt{30}] = 5$

【上式右边的 $[\sqrt{30}] = 5$，表示这一整数"30"分解成二个不同因数时，其中较小的因数小于或等于 5，以下同此。】

$70 = 2 \times 5 \times 7 = P_0P_1P_2 \quad [\sqrt{70}] = 8$

这些因数的排列是：

$30 = 1 \times 30 = 2 \times 15 = 3 \times 10 = 5 \times 6$ 【共 4 次】

$70 = 1 \times 70 = 2 \times 35 = 5 \times 14 = 7 \times 10$ 【共 4 次】

它们的 V 都是：$\frac{2^3}{2} = 4$

故表示式 3 也可由演算得证。

4. 若整数为 $P_0^aP_1$，则 $V = \frac{(a+1)2}{2} = a + 1$ 表示式 4

将 $P_0^aP_1$ 分解为 $P_0P_1 \times P_0^{a-1}$ 的形式时，则它的 V 等于 P_0P_1 的 V 再加 P_0P_1 的 $V \times \frac{a-1}{2}$。

即 $P_0^aP_1$ 的 $V = P_0P_1$ 的 $V \times (1 + \frac{a-1}{2})$

由表示式 2 已知 P_0P_1 的 V 等于 2，并代入上式，

故得到：$P_0^aP_1 = P_0P_1 \times P_0^{a-1} = 2 \times (1 + \frac{a-1}{2})$

$= 2 \times \frac{a+1}{2} = a + 1$

例如 $24 = 2^3 \times 3 = P_0^3P_1$ 其中 $a = 3$，$[\sqrt{24}] = 4$

$405 = 3^4 \times 5 = P_0^4 P_1$　其中 $a = 4$，$[\sqrt{405}] = 20$

以上分别代入表示式 4 得到：

24 的 $V = 3 + 1 = 4$

405 的 $V = 4 + 1 = 5$

它们的因数分别排列是：

$24 = 1 \times 24 = 2 \times 12 = 3 \times 8 = 4 \times 6$ 【共 4 次】

$405 = 1 \times 405 = 3 \times 135 = 5 \times 81 = 9 \times 45 = 15 \times 27$ 【共 5 次】

故表示式 4 验证无误。

5. 若整数为 $P_0^a P_1^b$，则 $V = \dfrac{(a+1)(b+1)}{2}$　　表示式 5

由表示式 4 的道理可得：

$$
\begin{aligned}
P_0^a P_1^b &= P_0^{a-1} \times P_0 P_1^b \\
&= P_0^{a-1} \times P_1^{b-1} \times P_0 P_1 \text{【其中 } P_0P_1 \text{ 由表示式 2，已知 } V = 2\text{】} \\
&= \left(1 + \frac{a-1}{2}\right)\left(1 + \frac{b-1}{2}\right) \times 2 \\
&= \frac{a+1}{2} \times \frac{b+1}{2} \times 2 \\
&= \frac{(a+1)(b+1)2}{2 \times 2} \\
&= \frac{(a+1)(b+1)}{2}
\end{aligned}
$$

例如　$108 = 2^2 \times 3^3 = P_0^2 P_1^3$　　又 $[\sqrt{108}] = 10$

上式中 $a = 2$，$b = 3$，代入表示式 5 得：

$$V = \frac{(2+1)(3+1)}{2} = 6$$

它的因数的排列是：

$108 = 1 \times 108 = 2 \times 54 = 3 \times 36 = 4 \times 27 = 6 \times 18$
$= 9 \times 12$ 【共 6 次】

故表示式 5 验证无误。

6. 若整数为$P_0^aP_1^bP_2^c$，则$V=\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{2}$　　表示式6

也由表示式4的道理得到：

$$P_0^aP_1^bP_2^c=P_0^{a-1}\times P_0P_1^bP_2^c$$
$$=P_0^{a-1}\times P_1^{b-1}\times P_0P_1P_2^c$$
$$=P_0^{a-1}\times P_1^{b-1}\times P_2^{c-1}\times P_0P_1P_2$$【由表示式3已知$P_0P_1P_2$的$V=4$】

$$=(1+\frac{a-1}{2})(1+\frac{b-1}{2})(1+\frac{c-1}{2})\times 4$$
$$=\frac{a+1}{2}\cdot\frac{b+1}{2}\cdot\frac{c+1}{2}\times 4$$
$$=\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{2\times2\times2}\times 4$$
$$=\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{2}$$

故表示式6得证。

例如$10800=2^4\times3^3\times5^2=P_0^4P_1^3P_2^2$，$[\sqrt{10800}]=103$

其中$a=4$，$b=3$，$c=2$，代入表示式6得到：

$$V=\frac{(4+1)(3+1)(2+1)}{2}=30$$

这30对因数的排列是：

$10800=1\times10800=2\times5400=3\times3600=4\times2700$
$=5\times2160=6\times1800=8\times1350=9\times1200$
$=10\times1080=12\times900=15\times720=16\times675$
$=18\times600=20\times540=24\times450=25\times432$
$=27\times400=30\times360=36\times300=40\times270$
$=45\times240=48\times225=50\times216=54\times200$
$=60\times180=72\times150=75\times144=80\times135$
$=90\times120=100\times108$。

故表示式6验证无误

7. 由上得知：

$P_0^a P_1^b P_2^c \cdots P_n^i$ 的 $V = \frac{(a+1)(b+1)(c+1)\cdots(i+1)}{2}$…………

………………………………………V 的总表示式

其中　$n = 0,1,2,\cdots,n$，　$i = a,b,c,\cdots\cdots$

上式如有 $(n+1)$ 个素数，则 V 的总表示式的分子是有 $(n+1)$ 个组连乘。

由此得知，一切整数，它的"V"都可由 V 的总表示式计算出来。

如以上表示式 1，实即：P_0 的 $V = \frac{(1+1)}{2} = 1$，

$$P_0^a \text{ 的 } V = \frac{(a+1)}{2};$$

表示式 2，实即 P_0P_1 的 $V = \frac{(1+1)(1+1)}{2}$，

表示式 3，实即 $P_0P_1P_2$ 的 $V = \frac{(1+1)(1+1)(1+1)}{2}$；

表示式 4，实即 $P_0^aP_1$ 的 $V = \frac{(a+1)(1+1)}{2}$。

前面讨论的"T"，也可运用这个 V 的总表示式求得。

例如前面 $P_0^5P_1^3P_2$ 的 $T = 115$，其实就是 $(P_0^5P_1^3P_2)^2$ 的 V，即 $(P_0^5P_1^3P_2)^2 = P_0^{10}P_1^6P_2^2$，其中 $a = 10, b = 6, c = 2$，

代入 V 的总表示式得到：

$$\frac{(10+1)(6+1)(2+1)}{2} = \frac{11\times7\times3}{2} = \left[\frac{231}{2}\right] = 115。$$

掌握了这种整数求"V"的方法，可以更替求"T"法，因为它容易记忆和运用，在以后，对 16 格图中已知一部分数字的各种填空图的填法计算也有所帮助，故这里特加上这一段。【详细在习题解答中举例讲解】。

仿以上填法，再填几个 9 格图，让读者对照验证，以加深理解：

由

$\frac{1}{2}$	10	$\frac{1}{5}$
$\frac{2}{5}$	$E=10$	$\frac{5}{2}$
5	$\frac{1}{10}$	2

图 $B8$

得到 ⇒

5	100	2
4	10	25
50	1	20

图 $B9$

每行 3 数之积 $10^3 = 1000$

由

$\frac{1}{3}$	6	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{2}$	$E=6$	$\frac{2}{3}$
2	$\frac{1}{6}$	3

图 $B10$

得到 ⇒

2	36	3
9	6	4
12	1	18

图 $B11$

每行 3 数之积 $6^3 = 216$

由

2	3	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{12}$	E 12	12
6	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

图 $B12$

得到 ⇒

24	36	2
1	12	144
72	4	6

图 $B13$

每行 3 数之积 $12^3 = 1728$

由

$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	2
3	$E=12$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$

图 $B14$

得到 ⇒

8	9	24
36	12	4
6	16	18

图 $B15$

每行 3 数之积 $12^3 = 1728$

由

$\frac{1}{2}$	14	$\frac{1}{7}$
$\frac{2}{7}$	$E=14$	$\frac{7}{2}$
7	$\frac{1}{14}$	2

图 $B16$

得到 ⇒

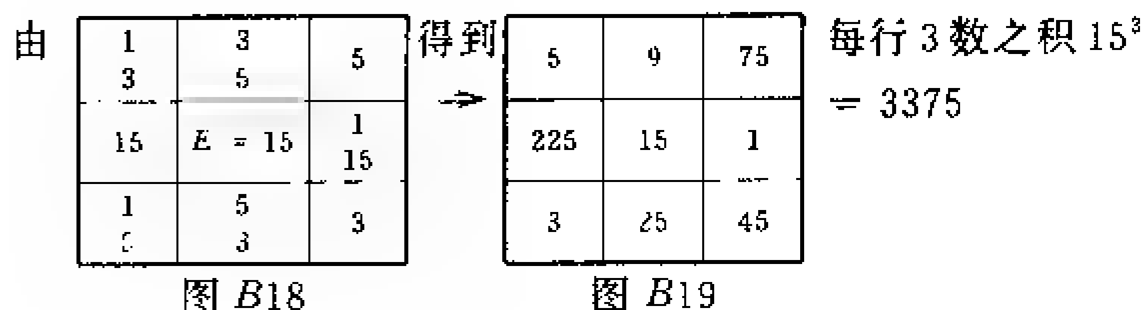
7	196	2
4	14	49
98	1	28

图 $B17$

每行 3 数之积 14^3

2744

由



$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{5}$	5
15	$E=15$	$\frac{1}{15}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{5}{3}$	3

图 $B18$

得到

5	9	75
225	15	1
3	25	45

图 $B19$

每行 3 数之积 $15^3=3375$

凡是填 9 格的方形图，如果先确定它中心数字 E 值，就可查表把 E 的“分数”列出，如果要求 E 值较大，表中没有此数，那就依照“整数求 T 法”把它的“分数”列出，按以上方法选择，使每行 3 个“分数”连乘等于 1，然后以 E 乘小格中的“分数”，所得的就是格中应填的数字。如果不是先确定 E 值，那就更容易了，例如在下图【图 $B20$】中，随便取二个分数写在上行左右二角，并将分数颠倒过来写在下的对称角，这时上行可立式填空，$\frac{2}{3}\times(\quad)\times\frac{7}{4}=1$，得到填空数为 $\frac{6}{7}$，左直行立式填空：$\frac{2}{3}\times(\quad)\times\frac{4}{7}=1$，得到填空数为 $\frac{21}{8}$，再将这二个分数颠倒过来填在对称格，就得到图 $B21$，最后将分数通分，取最小公倍数为 E 再乘各分数，得到图 $B22$，每行 3 数之积 $=168^3=4741632$

$\frac{2}{3}$		$\frac{7}{4}$
$\frac{4}{7}$		$\frac{3}{2}$

图 $B20$

$\frac{2}{3}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{4}$
$\frac{21}{8}$	E	$\frac{8}{21}$
$\frac{4}{7}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{3}{2}$

图 $B21$

112	144	294
441	168	64
96	196	252

图 $B22$

第二节　25 格图每行 5 数之积都相等的填数法

同上理，每行 5 数之积等于 E^5，每二个对称数之积等于 E^2。

取本章第一节图 $B2$ 填入图 $B23$ 中间 9 格，即由于 25 格图有：$\frac{25-1}{2}=12$，得知要有 12 个分数，才能满足填图，因 36 有 12 个分数【请参阅表】其中有 4 个正好是图中所有的，那么，剩下的 8 个，通过计算有：

$\frac{4}{9}\times\frac{1}{4}\times\frac{9}{2}\times\frac{1}{18}\times\frac{36}{1}=1$，可选填在上横行

$\frac{4}{9}\times\frac{3}{4}\times\frac{9}{1}\times\frac{12}{1}\times\frac{1}{36}=1$，可选填在左直行

	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{1}$	
	6	E	$\frac{1}{6}$	
	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{1}$	

图 $B23$

再将这些分数颠倒过来填入对称格，就可得到图 $B24$，以中心数字 36 乘格中的分数，就得到图 $B25$：

$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{36}{1}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{4}{3}$
$\frac{9}{1}$	$\frac{6}{1}$	E	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$
$\frac{12}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{18}{1}$	$\frac{9}{4}$

图 $B24$

每行 5 数之积 $=36^5$				
16	9	162	2	1296
27	12	54	72	48
324	216	36	6	4
432	18	24	108	3
1	144	8	648	81

图 $B25$

若要求填一个25格图每行5数之积为最小值，可查表得到30有13个“分数”，故30可做为中心数字得到每行5数之积为30^5，如图$B27$。

$\frac{15}{2}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{10}{1}$	$\frac{6}{1}$
$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{6}{5}$	$E=30$	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{2}$
$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{5}{2}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{30}{1}$	$\frac{15}{1}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{15}$

图 $B26$

225	1	2	300	180
90	15	100	18	10
20	36	30	25	45
12	50	9	60	75
5	900	450	3	4

图 $B27$
每行5数之积 30^5

如果不限于最小值，可不必用表，随便再举一例，将第一节图$B3$，作为25格图的中间9个分数，为了不使重复并易于选取起见，可以将这些已选用的分数写在图的旁边，以后每选一数，也接着写上去，即可一目了然：

	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{1}$	
	$\frac{9}{2}$	E	$\frac{2}{9}$	
	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	

图 $B28$

$\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{9}{2}, \frac{4}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$

$\frac{5}{3}, \frac{9}{1}, \frac{5}{4}, \frac{12}{5}, \frac{9}{4}$

先从上横行填起，适当选5数，使5数连乘等于1：如$\frac{4}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{5}{3}\times\frac{9}{1}=1$，再选$\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\frac{12}{5}\times\frac{9}{4}\times\frac{1}{9}=1$作为左直行5数，如图$B29$。

$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{9}{1}$
$\frac{5}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{5}$
$\frac{12}{5}$	$\frac{9}{2}$	E	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{12}$
$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{9}$
$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$

图 $B29$

将图中分数通分求出最小公倍作为 E 值，求得 $E=180$，以180乘各分数得到图 $B30$，每行5数之积 $=180^5$。

240	45	36	300	1620
225	120	90	540	144
432	810	180	40	75
405	60	360	270	80
20	720	900	108	135

图 $B30$

第三节　49格图每行7数之积都相等的填数法

同上理，每行7数之积等于 E^7，每二个对称数之积等于 E^2，取图 $B24$ 填入中间25格，由于49格有：$\frac{49-1}{2}=24$。又因为图 $B25$ 的中心数字是36，为了使这些分数也是另一中心数字所具有的，根据第一节"求 T 的部分公式7"【即 A^t 的 $T=1$ 至 t 的连续数之和 $\times 4$】得到 6^3 的 $T=(1+2+3)\times 4=24$，由表抄下这24个分数，除去中间25格已用的以外，剩下的12个，选出7数连乘等于1，即 $\frac{108}{1}\times\frac{27}{8}\times\frac{1}{24}\times\frac{27}{1}\times\frac{4}{27}\times\frac{1}{54}\times\frac{8}{9}=1$ 做为图 $B31$ 上横行

各数，又选 $\frac{108}{1} \times \frac{1}{8} \times \frac{8}{3} \times \frac{2}{27} \times \frac{72}{1} \times \frac{1}{216} \times \frac{9}{8} = 1$

做为图 $B31$ 左直行各数，再将这些分数颠倒母子后填入对称格，可得图 $B32$，最后以中心数字 216 乘各分数得到图 $B33$。每行 7 数之积 $= 216^7$

	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{36}{1}$	
	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{4}{3}$	
	$\frac{9}{1}$	$\frac{6}{1}$	E	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	
	$\frac{12}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{12}$	
	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{18}{1}$	$\frac{9}{4}$	

图 $B31$

$\frac{108}{1}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{27}{1}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{1}{54}$	$\frac{8}{9}$
$\frac{1}{8}$						$\frac{8}{1}$
$\frac{8}{3}$						$\frac{3}{8}$
$\frac{2}{27}$			E			$\frac{27}{2}$
$\frac{72}{1}$						$\frac{1}{72}$
$\frac{1}{216}$						$\frac{216}{1}$
$\frac{9}{8}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{24}{1}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{27}{4}$	$\frac{54}{1}$	$\frac{1}{108}$

图 $B32$

23328	729	9	5832	32	4	192
27	96	54	972	12	7776	1728
576	162	72	324	432	288	81
16	1944	1296	216	36	24	2916
15552	2592	108	144	648	18	3
1	6	864	48	3888	486	46656
243	64	5184	8	1458	11664	2

图 $B33$

以上是先确定 49 格图的中心格数字的填数法，这种填法是比较困难的，同时中心数字的确定，也不是任意的，它必须具有 24 个或 24 个以上的“分数”，也不是整数大，它的“分数”就多，从表看，由 1 至 300 中，具有 24 个“分数”的整数，仅有：168【有 31 个】、180【有 37 个】、210【有 40 个】、216【有 24 个】、252【有 37 个】、264【有 31 个】、300【有 37 个】共 7 数，如果要取每行 7 数之积的最小值，就是取 E 等于 168，它有 31 个“分数”供选择，“分数”越少，选择的难度越大，所以，如果不按确定 E 值去填数，就比较容易一些；再举一例，如果取前面 25 格图例二图 $B29$ 为 49 格图内边 25 格数字【指分数】【也可以随便另选取】，然后再取外围格的数字，只要不相同的分数，都可以选取，经计算有：

$$\frac{7}{5}\times\frac{10}{21}\times\frac{10}{7}\times\frac{2}{5}\times\frac{5}{8}\times\frac{7}{3}\times\frac{9}{5}=1$$

又 $$\frac{7}{5}\times\frac{1}{6}\times\frac{7}{1}\times\frac{6}{7}\times\frac{8}{7}\times\frac{9}{8}\times\frac{5}{9}=1$$

可填成图 $B34$ 将分母通分，求出最小公倍，即为此图中心数最小值，求得 $E=2520$，于是得到图 $B35$。每行 7 数之积 $=2520^7$

$\frac{7}{5}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{9}{5}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{9}{1}$	$\frac{6}{1}$
$\frac{7}{1}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{7}$
$\frac{6}{7}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{9}{2}$	E	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{6}$
$\frac{8}{7}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{7}{8}$
$\frac{9}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{8}{9}$
$\frac{5}{9}$	$\frac{21}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{5}{7}$

图 $B34$

3528	1200	3600	1008	1575	5880	4536
420	3360	630	504	4200	22680	15120
17640	3150	1680	1260	7560	2016	36
2160	6048	11340	2520	560	1050	2940
2880	5670	840	5040	3780	1120	2205
2835	280	10080	12600	1512	1890	2240
1400	5292	1764	6300	4032	1080	1800

图 $B35$

第四节　81格图每行9数之积都相等的填数法

前面我们介绍了49格图的填数法，其中第一例是在填好9格图、25格图的基础上再填外层格的数字的，现在不妨仍在填好49格图的基础上再填81格图。为此，要选的中心数字 E 的“分数”必须既有原49格图的“分数”，且要至少加16个“分数”，才能填入81格图的外层格，前面49格图的中心数字是216，这216等于 6^3，而

6^3 仅有 24 个"分数"，不适合填 81 格图，为此，要运用第一节的"求 T 公式 7"得到：6^4 的"分数"有：$(1+2+3+4)\times 4=40$，由此得知取中心数为 6^4 时有 40 个"分数"符合要求，从这些"分数"中选出：

$$\frac{4}{81}\times\frac{324}{1}\times\frac{3}{16}\times\frac{1}{16}\times\frac{16}{9}\times\frac{81}{2}\times\frac{81}{8}\times\frac{16}{27}\times\frac{1}{81}=1$$

又 $\frac{4}{81}\times\frac{48}{1}\times\frac{1}{162}\times\frac{1}{144}\times\frac{81}{16}\times\frac{1}{432}\times\frac{1}{1296}\times\frac{648}{1}\times\frac{81}{1}=1$

得到图 $B36$

$\frac{4}{81}$	$\frac{324}{1}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{81}{2}$	$\frac{81}{8}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{1}{81}$
$\frac{48}{1}$	$\frac{108}{1}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{27}{1}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{1}{54}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{1}{48}$
$\frac{1}{162}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{36}{1}$	$\frac{8}{1}$	$\frac{162}{1}$
$\frac{1}{144}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{144}{1}$
$\frac{81}{16}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{9}{1}$	$\frac{6}{1}$	E	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{27}{2}$	$\frac{16}{81}$
$\frac{1}{432}$	$\frac{72}{1}$	$\frac{12}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{72}$	$\frac{432}{1}$
$\frac{1}{1296}$	$\frac{1}{216}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{18}{1}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{216}{1}$	$\frac{1296}{1}$
$\frac{648}{1}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{24}{1}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{27}{4}$	$\frac{54}{1}$	$\frac{1}{108}$	$\frac{1}{648}$
$\frac{81}{1}$	$\frac{1}{324}$	$\frac{16}{3}$	$\frac{16}{1}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{81}{4}$

图 $B36$

将 $E=1296$ 乘图 $B36$ 各分数，得到图 $B37$。

64	419904	243	81	2304	52488	13122	768	16
62208	139968	4374	54	34992	192	24	1152	27
8	162	576	324	5832	72	46656	10368	209952
9	3456	972	432	1944	2592	1728	486	186624
6561	96	11664	7776	1296	216	144	17496	256
3	93312	15552	648	864	3888	108	18	559872
1	6	36	5184	288	23328	2916	279936	1679616
839808	1458	384	31104	48	8748	69984	12	2
104976	4	6912	20736	729	32	128	2187	26244

图 $B37$

凡是奇格数的方形图的填数法，都可依照以上的方法去填。

再分析格数是偶数的方形图的填数法。

第五节　16 格图每行 4 数之积都相等的填数法

参阅第十四章第四节做图 $B38$，使从每行看，都有 $abcd$ 四数，即每行 4 数之积等于 $abcd$ 的乘积；图四周 12 个代数【指英文字母】同前面讲的一样，都要另选适当数字乘之，（实际只选 6 个数，因其余 6 个是对称数，只要把选定的数倒过来，填入对称格就可以了，也就是说，二个对称数的乘数相乘等于 1，只有如此，才能使每行 4 数之积仍等于 $abcd$ 连乘积。为容易计算起见，我们将图的四周二个 a 分别乘以 2，3，4，并取 a 的对称数分别乘以 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，如图 $B38$，中间的 a、b、c、d 不需选乘数【其实乘数都是 1】，同时在图的右边记上所乘之数，即：

			$\frac{1}{3}$		
	b	d	c	a	4
	c	a	b	d	
2	a	c	d	b	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$	d	b	a	c	
			3		

a、$\times 2$，$\times 3$，$\times 4$，

b、$\times \frac{1}{2}$，

c、$\times \frac{1}{3}$，

d、$\times \frac{1}{4}$，

图 $B38$

这时，另外二个 b 的乘数，如果取分数，则取其分母为 2 或 2 的倍数，【也可以取整数】这样可使在通分时，最小公倍数不会太大。在左上角 b 可取 $\frac{3}{2}$，因为它的对称数【对称角】是 c，而 c 的乘数的分母是 3，故其对称数 c 取 $\frac{2}{3}$，同时又记在图的右边，如图 $B39$：

			$\frac{1}{3}$		
$\frac{3}{2}$	b	d	c	a	4
	c	a	b	d	
2	a	c	d	b	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$	d	b	a	c	$\frac{2}{3}$
			3		

a、$\times 2$，$\times 3$，$\times 4$，

b、$\times \frac{1}{2}$，$\times \frac{3}{2}$，

c、$\times \frac{1}{3}$，$\times \frac{2}{3}$，

d、$\times \frac{1}{4}$，

图 $B39$

这时，图 $B39$ 的上横行 4 数可立式填空，即，

$$\frac{3}{2} \times (\quad) \times \frac{1}{3} \times 4 = 1$$

得到填空数是 $\frac{1}{2}$，即 d 的乘数是 $\frac{1}{2}$，d 的对称数 b 的乘数就是 $\frac{2}{1}$。图 $B39$ 的左直行也立式填空，即

$$\frac{3}{2} \times (\quad) \times 2 \times \frac{1}{4} = 1$$

得到填空数是 $\frac{4}{3}$，即 c 的乘数是 $\frac{4}{3}$，c 的对称数 d 的乘数就是 $\frac{3}{4}$，如图 $B40$【例一】：

		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$		
$\frac{3}{2}$	b	d	c	a	4
$\frac{4}{3}$	c	a	b	d	$\frac{3}{4}$
2	a	c	d	b	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$	d	b	a	c	$\frac{2}{3}$
		2	3		

a、$\times 2$，$\times 3$，$\times 4$

b、$\times \frac{1}{2}$，$\times \frac{3}{2}$，$\times 2$

c、$\times \frac{1}{3}$，$\times \frac{2}{3}$，$\times \frac{4}{3}$

d、$\times \frac{1}{4}$，$\times \frac{1}{2}$，$\times \frac{3}{4}$

图 $B40$

现在再计算图 $B40$ 中 a、b、c、d 之值

先从最小整数取起

如取 $a=1$，得到 $a\times2=2$，$a\times3=3$，$a\times4$；再取 b 的最小值，因 b 的乘数，通分为 2，为了不与 a 各值重复，b 应取 2 的倍数，故取：$b=10$，得到 $b\times\frac{1}{2}=5$，$b\times\frac{3}{2}=15$，$b\times2=20$；又取 c 的最小值，因 c 的乘数，分母为 3，为了不与 a 和 b 各值重复，c 应取 3 的倍数，故取：$c=18$，得到 $c\times\frac{1}{3}=6$，$c\times\frac{2}{3}=12$，$c\times\frac{4}{3}=24$；又取 d 的最小值，因 d 的乘数，通分为 4，为了不和 a、b、c 各值重复，d 应取 4 的倍数，故取：$d=28$，得到 $d\times\frac{1}{4}=7$，$d\times\frac{1}{2}=14$，$d\times\frac{3}{4}=21$。最后可得到图 $B41$，每行 4 数之积 $=5040$，这是 16 格图每行 4 数之积的最小值。

15	14	6	4
24	1	10	21
2	18	28	5
7	20	3	12

图 $B41$

因为凡是填格数为偶数的方形图都必须以 16 格图作为中间 16 格的依据，现为方便以后选用的需要，特再填几例：【例 二】

		$\frac{13}{11}$	$\frac{1}{21}$		
$\frac{13}{11}$	b	d	c	a	11
$\frac{11}{21}$	c	a	b	d	$\frac{21}{11}$
13	a	c	d	b	$\frac{1}{13}$
$\frac{1}{11}$	d	b	a	c	$\frac{13}{21}$
		$\frac{11}{13}$	21		

a、$\times13$、$\times21$、$\times11$

b、$\times\frac{1}{13}$，$\times\frac{21}{13}$，$\times\frac{11}{13}$

c、$\times\frac{1}{21}$，$\times\frac{13}{21}$，$\times\frac{11}{21}$

d、$\times\frac{1}{11}$，$\times\frac{13}{11}$，$\times\frac{21}{11}$

图 $B42$

仿上例计算各值

$a = 1, a \times 13 = 13, a \times 21 = 21, a \times 11 = 11,$

$b = 26, b \times \frac{1}{13} = 2, b \times \frac{21}{13} = 42, b \times \frac{11}{13} = 22,$

$c = 63, c \times \frac{1}{21} = 3, c \times \frac{13}{21} = 39, c \times \frac{11}{21} = 33,$

$d = 55, d \times \frac{1}{11} = 5, d \times \frac{13}{11} = 65, d \times \frac{21}{11} = 105$。

每行 4 数之积 = 90090

42	65	3	11
33	1	26	105
13	63	55	2
5	22	21	39

图 $B43$

【例二】

Top labels: $\frac{6}{7}$ (column 2), $\frac{1}{13}$ (column 3)

Left					Right
$\frac{13}{12}$	b	d	c	a	14
$\frac{14}{13}$	c	a	b	d	$\frac{13}{14}$
12	a	c	d	b	$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{14}$	d	b	a	c	$\frac{12}{13}$

Bottom labels: $\frac{7}{6}$ (column 2), 13 (column 3)

a、$\times 12, \times 13, \times 14$

b、$\times \frac{1}{12}, \times \frac{13}{12}, \times \frac{7}{6}$

c、$\times \frac{1}{13}, \times \frac{12}{13}, \times \frac{14}{13}$

d、$\times \frac{1}{14}, \times \frac{6}{7}, \times \frac{13}{14}$

图 $B44$

仿上例计算各值

$a = 1, a \times 12 = 12, a \times 13 = 13, a \times 14 = 14,$

$b = 24, b \times \frac{1}{12} = 2, b \times \frac{13}{12} = 26, b \times \frac{7}{6} = 28,$

$c = 39, c \times \frac{1}{13} = 3, c \times \frac{12}{13} = 36, c \times \frac{14}{13} = 42,$

$d = 56, d \times \frac{1}{14} = 4, d \times \frac{6}{7} = 48, d \times \frac{13}{14} = 52$。

每行 4 数之积 = 52416

26	48	3	14
42	1	24	52
12	39	56	2
4	28	13	36

图 $B45$

【例四】

		5/7	1/6		
6/5	b	d	c	a	7
7/6	c	a	b	d	6/7
5	a	c	d	b	1/5
1/7	d	b	a	c	5/6
		7/5	6		

a、$\times 5$，$\times 6$，$\times 7$

b、$\times \frac{1}{5}$，$\times \frac{6}{5}$，$\times \frac{7}{5}$

c、$\times \frac{1}{6}$，$\times \frac{5}{6}$，$\times \frac{7}{6}$

d、$\times \frac{1}{7}$，$\times \frac{5}{7}$，$\times \frac{6}{7}$

图 $B46$

仿上例计算各值

$a = 1$，$a \times 5 = 5$，$a \times 6 = 6$，$a \times 7 = 7$，

$b = 10$，$b \times \frac{1}{5} = 2$，$b \times \frac{6}{5} = 12$，$b \times \frac{7}{5} = 14$，

$c = 18$，$c \times \frac{1}{6} = 3$，$c \times \frac{5}{6} = 15$，$c \times \frac{7}{6} = 21$，

$d = 28$，$d \times \frac{1}{7} = 4$，$d \times \frac{5}{7} = 20$，$d \times \frac{6}{7} = 24$。

每行 4 数之积 = 5040

12	20	3	7
21	1	10	24
5	18	28	2
4	14	6	15

图 $B47$

由上得知，5040 是 16 格图每行 4 数之积的最小值，为什么呢？因为选取 a【b、c、d 也如此】的乘数时，1、2、3、4 是较小上整数【如果选为分数，因其对称数是颠倒母子数，也就是整数了，故不妨假设是整数】因此，选取乘以 a 的数越小【包括这 a 的 4 个乘数之间的比例】则图的每行 4 数之积越小。如果选 a 的乘数为分数，且它们之间的比例较大，分母又不相同，则每行 4 数之积会很大，再举例如下：【例五】

		$\frac{28}{9}$	$\frac{3}{4}$		
$\frac{5}{2}$	b	d	c	a	$\frac{2}{7}$
$\frac{10}{21}$	c	a	b	d	$\frac{21}{10}$
$\frac{2}{5}$	a	c	d	b	$\frac{5}{2}$
$\frac{7}{2}$	d	b	a	c	$\frac{2}{3}$
		$\frac{9}{28}$	$\frac{4}{3}$		

a、$\times\frac{2}{5}$，$\times\frac{4}{3}$，$\times\frac{2}{7}$

b、$\times\frac{5}{2}$，$\times\frac{3}{2}$，$\times\frac{9}{28}$

c、$\times\frac{3}{4}$，$\times\frac{2}{3}$，$\times\frac{10}{21}$

d、$\times\frac{7}{2}$，$\times\frac{28}{9}$，$\times\frac{21}{10}$

图 $B48$

a 的取值，因 $5,3,7=105$，故得：

$$a=105,\ a\times\frac{2}{5}=42,\ a\times\frac{4}{3}=140,\ a\times\frac{2}{7}=30$$

b 的取值，是 28 的倍数，为了不与 a 值重复，故得：

$$b=84,\ b\times\frac{5}{2}=210,\ b\times\frac{3}{2}=126,\ b\times\frac{9}{28}\quad 27$$

c 的取值，因 $3\ \frac{4,3,21}{4\quad 1\quad 7}=84$，它与 b 重复，应取其倍数，故得：

$c = 252$，$c \times \frac{3}{4} = 189$，$c \times \frac{2}{3} = 168$，$c \times \frac{10}{21} = 120$，

d的取值，因 $2\ \frac{2}{1},\frac{9}{9},\frac{10}{5} = 90$，为了不与以上各数重复，应取其倍数，故得：

$d = 180$，$d \times \frac{7}{2} = 630$，$d \times \frac{28}{9} = 560$，$d \times \frac{21}{10} = 378$

每行 4 数之积 = 400075200

126	560	189	30
120	105	84	378
42	252	180	210
630	27	140	168

图 $B49$

【例六】

		$\frac{49}{9}$	$\frac{3}{2}$		
$\frac{2}{7}$	b	d	c	a	$\frac{3}{7}$
3	c	a	b	d	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}$	a	c	d	b	2
$\frac{7}{3}$	d	b	a	c	$\frac{7}{2}$
		$\frac{9}{49}$	$\frac{2}{3}$		

a、$\times \frac{3}{7}$，$\times \frac{1}{2}$，$\times \frac{2}{3}$

b、$\times \frac{2}{7}$，$\times \frac{9}{49}$，$\times 2$

c、$\times 3$，$\times \frac{7}{2}$，$\times \frac{3}{2}$

d、$\times \frac{7}{3}$，$\times \frac{1}{3}$，$\times \frac{49}{9}$

图 $B50$

仿上例计算各值

$a = 42$，$a \times \frac{1}{2} = 21$，$a \times \frac{3}{7} = 18$，$a \times \frac{2}{3} = 28$，

$b = 196$，$b \times \frac{2}{7} = 56$，$b \times \frac{9}{49} = 36$，$b \times 2 = 392$，

$c = 2$，$c \times 3 = 6$，$c \times \frac{7}{2} = 7$，$c \times \frac{3}{2} = 3$，

$d=27, d\times\frac{7}{3}=63, d\times\frac{1}{3}=9, d\times\frac{49}{9}=147$。

每行 4 数之积 = 444528

56	147	3	18
6	42	196	9
21	2	27	392
63	36	28	7

图 $B51$

【例七】

		$\frac{16}{3}$	3		
$\frac{1}{4}$	b	d	c	a	$\frac{1}{4}$
$\frac{3}{2}$	c	a	b	d	$\frac{2}{3}$
$\frac{2}{3}$	a	c	d	b	$\frac{3}{2}$
4	d	b	a	c	4
		$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{3}$		

a、$\times\frac{1}{4}$，$\times\frac{2}{3}$，$\times\frac{1}{3}$

b、$\times\frac{1}{4}$，$\times\frac{3}{16}$，$\times\frac{3}{2}$

c、$\times 3$，$\times\frac{3}{2}$，$\times 4$

d、$\times\frac{16}{3}$，$\times 4$，$\times\frac{2}{3}$

图 $B52$

仿上例计算各值

$a=96, a\times\frac{1}{4}=24, a\times\frac{2}{3}=64, a\times\frac{1}{3}=32,$

$b=48, b\times\frac{1}{4}=12, b\times\frac{3}{16}=9, b\times\frac{3}{2}=72,$

$c=128, c\times 3=384, c\times 4=512, c\times\frac{3}{2}=192,$

$d=15, d\times\frac{16}{3}=80, d\times 4=60, d\times\frac{2}{3}=10$。

每行 4 数之积 = 8847360

12	80	384	24
192	96	48	10
64	128	15	72
60	9	32	512

图 $B53$

第六节　36格图每行6数之积都相等的填数法

填36格图比上面所讲的各图，难度较大，它不容易先确定每行6数之积。仿照第十四章第五节的道理，这个36格图的每行6数之积，是等于一个整数的6次方，外围二个对称数之积是这一整数的二次方，因此，图中间每行4数之积，是等于这一整数的4次方【即S^4】，其指数等于外层行6数之积的指数的$\frac{2}{3}$。又根据本章第二节的道理，也要查表，选一个有10个“分数”的整数，因为36格图的外层共有10对对称数；但又因为图内每行4数之积等于外层行6数之积的指数的$\frac{2}{3}$，那么，就要选一个16格图的数来套入，然而，很难有一个现成的一个16格图每行4数之积等于外层行6数之积的指数的$\frac{2}{3}$，同时每格的数字与外层格的数字不重复，因此，还要进行配方计算，所以36格图的填数法，有以下步骤：

1．查“中心数字表”，先选取有10个【或10个以上】“分数”的整数E，在E的“分数”中选出6个分数，要满足连乘等于1的条件，做为这图上横行的6数，同理又做左直行6数连乘等于1，并填上对称数，即把图的外层格填满。

2．适当选一个16格图，将其中$abcd$4数之积与E^4进行配方计算，就是使这E^4或E^4的倍数等于$abcd$之积或其倍数。

3．检查外层格数字和16格图数字的重复情况，将a、b、c、d中

有重复的数字，分别进行倍大，如果不能满足这个要求，则再选另一个16格图，重新进行配方计算，直至符合要求为止。现在就按照这个步骤举例如下：查“中心数字表”有：整数36的“分数”有12个：

$$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{4}{9},\frac{1}{12},\frac{1}{18},\frac{1}{36}。$$

仿以上方法得到图 $B54$ 例一

$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{9}{1}$	$\frac{4}{3}$
$\frac{2}{9}$					$\frac{9}{2}$
$\frac{4}{1}$					$\frac{1}{4}$
$\frac{18}{1}$					$\frac{1}{18}$
$\frac{1}{36}$					$\frac{36}{1}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{12}{1}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$

图 $B54$

选本章第五节16格图例六【即图 $B50$，图 $B51$】

		$\frac{49}{9}$	$\frac{3}{2}$		
$\frac{2}{7}$	b	d	c	a	$\frac{3}{7}$
$\frac{3}{1}$	c	a	b	d	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}$	a	c	d	b	$\frac{2}{1}$
$\frac{7}{3}$	d	b	a	c	$\frac{7}{2}$
		$\frac{9}{49}$	$\frac{2}{3}$		

56	147	3	18
6	42	196	9
21	2	27	392
63	36	28	7

将 36^4 与图 $B51$ 中 $abcd$ 之积进行配方，可立方程如下，其中：

B 是 36 要扩大的倍数，F 是 $abcd$ 要扩大的倍数。

$$\frac{(36B)^4}{42\times196\times2\times27}=F$$

$$\because\ \frac{36\times36\times36\times36\times B^4}{42\times169\times2\times27}=\frac{36^2\times B^4}{7^3}=F$$

$\therefore B=7\qquad F=7\times36^2$

因　$36B=252$　故以 252 乘 36 格图（图 $B54$）外层各分数可得图 $B55$。

756	126	168	21	2268	336
56					1134
1008					63
4536					14
7					9072
189	504	378	3024	28	84

图 $B55$

因　a 值中的 21，28 与 36 格图外层数字重复

　　b 值中的 56　与 36 格图外层数字重复

　　c 值中的 7　　与 36 格图外层数字重复

　　d 值中的 63　与 36 格图外层数字重复

故　a、b、c、d 都要倍大

又由于 $F=36^2\times7=2\times2\times2\times2\times3\times3\times3\times3\times7$

先将 a 各值乘以 2，得到的如果与 36 格图外层格数字重复，就改为乘以 3，如仍有重复，就改为乘以 4，……，如此由小到大，将 F 的因数轮换乘之，直至不相重复为止，其次又乘 b，仿此方法，直到得到的与 36 格图外层数字和新选得的 a 各值不相重为止 …，最后

用以乘 a、b、c、d 的四组数的乘数连乘等于 $36^2 \times 7$，否则要重新选 16 格图。按此方法，得到：$36^2 \times 7 = 14 \times 4 \times 6 \times 27$

即：a 乘以 14 得到新数值为 588、294、252、392，

b 乘以 4 得到新数值为 784、224、1344、1568，

c 乘以 6 得到新数值为 12、36、42、18，

d 乘以 27 得到新数值为 729、1701、243、3969，

最后得到图 $B56$

756	126	168	21	2268	336
56	224	3969	18	252	1134
1008	36	588	784	243	63
4536	294	12	729	1568	14
7	1701	144	392	42	9072
189	504	378	3024	28	84

图 $B56$

每行 6 数之积 $= (36 \times 7)^6 = 252^6 = 256096265048064$

再举一例由“中心数字表”得到整数 48 有 13 个“分数”，仿上方法，填得 36 格图的外层格，如图 $B57$。例三

$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{16}{1}$	$\frac{6}{1}$
$\frac{12}{1}$					$\frac{1}{12}$
$\frac{3}{1}$					$\frac{1}{3}$
$\frac{2}{3}$					$\frac{3}{2}$
$\frac{2}{1}$					$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{24}{1}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{8}{1}$

图 $B57$

选第五节 16 格图例七【图 $B52$，图 $B53$】

		16/3	3/1		
1/4	*b*	*d*	*c*	*a*	1/4
3/2	*c*	*a*	*b*	*d*	2/3
2/3	*a*	*c*	*d*	*b*	3/2
4/1	*d*	*b*	*a*	*c*	4/1
		3/16	1/3		

12	80	384	24
192	96	48	10
64	128	15	72
60	9	32	512

∵ $$\frac{(48B)^4}{96 \times 48 \times 128 \times 15} = F,$$

得到 $$\frac{48 \times 48 \times 48 \times 48 \times B^4}{96 \times 48 \times 128 \times 15} = \frac{3B^4}{5} = F$$

∴ $B = 5$，$F = 3 \times 5^3$

以 $48 \times 5 = 240$ 乘 36 格图(图 $B57$) 外层的分数得到图 $B58$。

30	10	640	180	3840	1440
2880					20
720					80
160					360
480					120
40	5760	90	320	15	1920

图 $B58$

16 格图中的 a、b、c 三数各数值都不与 36 格图外层数字重复，只有 d 值中 15、80、10 与 36 格图外层数字重复，故以 d 值乘以 375 得到新值为 5625，2250，3000，3750【如果有重复，就将 375 适当分

解成几个因数，分别乘a、b、c、d或a、b、d或a、c、d或d、c、b或a、d或b、d或c、d】

最后得到图 $B59$，每行 6 数之积 $=240^6=191102976000000$

30	10	640	180	3840	1440
2880	12	3000	384	24	20
720	192	96	48	3750	80
160	64	128	5625	72	360
480	2250	9	32	512	120
40	5760	90	320	15	1920

图 $B59$

第七节　64 格图每行 8 数之积都相等的填数法

这一节的填数法，也同上节一样，只不过是外围第一层每行 8 数之积等于一个整数的 8 次方，第二层每行 6 数之积等于同一整数的 6 次方，内边 16 格每行 4 数之积仍等于同一整数的 4 次方。由于 64 格减去中间 16 格后，外二层共 48 格，也就是 24 对对称数，故在“中心数字表”中选择这一整数要有 24 个【或 24 个以上】“分数”才能适合填 64 格图，也同上节一样，选得 180 这个整数，并取它的“分数”做图 $B60$。

$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{10}{1}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{18}{1}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{5}{3}$
$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{36}$					$\frac{36}{5}$	$\frac{6}{5}$
$\frac{20}{9}$	$\frac{18}{5}$					$\frac{5}{18}$	$\frac{9}{20}$
$\frac{9}{4}$	$\frac{15}{2}$					$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{9}$
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{60}$					$\frac{60}{1}$	$\frac{12}{1}$
$\frac{12}{5}$	$\frac{20}{1}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{1}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{12}$
$\frac{4}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{15}{1}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{1}$

图 $B60$

选第五讲 16 格图例六【图 $B50$、图 $B51$】进行配方，

		$\frac{49}{9}$	$\frac{3}{2}$		
$\frac{2}{7}$	b	d	c	a	$\frac{3}{7}$
$\frac{3}{1}$	c	a	b	d	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}$	a	c	d	b	$\frac{[illegible]}{1}$
$\frac{7}{3}$	d	b	a	c	$\frac{7}{2}$
		$\frac{9}{49}$	$\frac{2}{3}$		

56	147	3	18
6	42	196	9
21	2	27	392
63	36	28	7

$$\because \quad \frac{(180B)^4}{42\times196\times2\times27}=F$$

$$\frac{180\times180\times180\times180\times B^4}{42\times196\times2\times27}=\frac{5^2\times180^2\times B^4}{7^3}=F$$

$\therefore\quad B=7 \qquad F=7\times5^2\times180^2$，又因 $180\times7=1260$，故以

1260 乘 64 格图(图 $B60$) 外一、二层的分数可得图 $B61$

630	3780	840	5670	1680	84	1260	315
756	1008	3150	4200	210	22680	63	2100
1050	175					9072	1512
2800	4536					350	567
2835	9450					168	560
105	21					75600	15120
3024	25200	504	378	7560	70	1575	525
5040	420	1890	280	945	18900	126	2520

图 $B61$

因　a 值中有 21 与 64 格图外二层的数字重复

d 值中有 63 与 64 格图外二层的数字重复

b 和 c 值没有与 64 格图外二层的数字重复;故只须将 $F = 7 \times 5^2 \times 180^2$ 适当分为二个因数,分别乘 a 值和 d 值各数,即:

$$7 \times 5^2 \times 180^2 = 5670000 = 70 \times 81000$$

以 70 乘 a 各值得:2940,1470,1260,1960

以 81000 乘 d 各值得:2187000　5103000　729000　11907000 可填成图 $B62$,每行 8 数之积 $= 1260^8$

630	3780	840	5670	1680	84	12600	315
756	1008	3150	4200	210	22680	63	2100
1050	175	56	11907000	3	1260	9072	1512
2800	4536	6	2940	196	729000	350	567
2835	9450	1470	2	2187000	392	168	560
105	21	5103000	36	1960	7	75600	15120
3024	25200	504	378	7560	70	1575	525
5040	420	1890	280	945	18900	126	2520

图 $B62$

第八节　100格图每行10数之积都相等的填数法

100格图的填数法，仍可在填64格图的基础上再填外层格，但必须选择这个整数，有42个"分数，同时又必须包括原64格图中那些分数，因原64格图的整数是180，因此，只有选180的倍数，如果选用360，先用本章第一节"求T公式"测试360有多少个"分数"，

因 $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5 = P_0^3 P_1^2 P_2$，由公式7有 $P_0^t c = P_0^{t-1} \times P_0 C = P_0 c + (P_0 c - c)(t - 1)$

如以 $P_0 c = P_0 P_1^2 P_2$（即 $2 \times 3^2 \times 5 = 90$）则有 $1 + 3 + 3^2 \times 2 = 22$ 个 T

以 $c = P_1^2 P_2$（即 $3^2 \times 5 = 45$）则有 $1 + 3 \times 2 = 7$ 个 T

将其代入求"T"公式7可得到360的T有52个，也可按求V法得：

即先将$(P_0^3P_1^2P_2)^2 = P_0^6P_1^4P_2^2$再由总公式得：

$$\left[\frac{(1+6)(4+1)(2+1)}{2}\right] = 52\text{个},$$

并按“求 T 方法”列出这 52 个“分数”如下：$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}$、$\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{9}{10}, \frac{1}{12}, \frac{5}{12}$, $\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{4}{15}, \frac{8}{15}, \frac{1}{18}, \frac{5}{18}, \frac{1}{20}, \frac{3}{20}, \frac{9}{20}, \frac{1}{24}, \frac{5}{24}, \frac{1}{30}, \frac{1}{36}, \frac{5}{36}, \frac{1}{40}, \frac{3}{40}, \frac{9}{40}$, $\frac{1}{45}, \frac{2}{45}, \frac{4}{45}, \frac{8}{45}, \frac{1}{60}, \frac{1}{72}, \frac{5}{72}, \frac{1}{90}, \frac{1}{120}, \frac{1}{180}, \frac{1}{360}$共 52 个，减去原 64 格图已用去 24 个，尚存 28 个如下：

$\frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{1}{9}, \frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}, \frac{4}{15}, \frac{8}{15}, \frac{3}{20}, \frac{1}{24}, \frac{5}{24}, \frac{1}{30}, \frac{1}{36}, \frac{1}{40}, \frac{3}{40}, \frac{9}{40}$, $\frac{1}{45}, \frac{2}{45}, \frac{4}{45}, \frac{8}{45}, \frac{1}{72}, \frac{5}{72}, \frac{1}{90}, \frac{1}{120}, \frac{1}{180}, \frac{1}{360}$,

选取$\frac{15}{8} \times \frac{8}{3} \times \frac{10}{9} \times \frac{9}{40} \times \frac{9}{5} \times \frac{8}{9} \times \frac{4}{15} \times \frac{1}{8} \times \frac{24}{1} \times \frac{5}{8} = 1$

做为 100 格图外层上横行 10 个数字，又选取

$\frac{15}{8} \times \frac{1}{5} \times \frac{5}{24} \times \frac{8}{45} \times \frac{45}{1} \times \frac{2}{45} \times \frac{45}{4} \times \frac{3}{20} \times \frac{40}{3} \times \frac{8}{5} = 1$

做为 100 格图外层左直行 10 个数字，

再选用本章第五节 16 格图例六【图 B50，图 B51】进行配方。

$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{10}{1}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{18}{1}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{5}{3}$
$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{36}$					$\frac{36}{5}$	$\frac{6}{5}$
$\frac{20}{9}$	$\frac{18}{5}$					$\frac{5}{18}$	$\frac{9}{20}$
$\frac{9}{4}$	$\frac{15}{2}$					$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{9}$
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{60}$					$\frac{60}{1}$	$\frac{12}{1}$
$\frac{12}{5}$	$\frac{20}{1}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{1}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{12}$
$\frac{4}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{15}{1}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{1}$

	$\frac{49}{9}$	$\frac{3}{2}$			
$\frac{2}{7}$	b	d	c	a	$\frac{3}{7}$
$\frac{3}{1}$	c	a	b	d	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}$	a	c	d	b	$\frac{2}{1}$
$\frac{7}{3}$	d	b	a	c	$\frac{7}{2}$
	[illegible]/19	$\frac{2}{3}$			

56	147	3	18
6	42	196	9
21	[illegible]	27	392
63	36	28	7

连同第七节 64 格图的数做成图 $B63$

$\frac{15}{8}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{24}{1}$	$\frac{5}{8}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{10}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{1}$
$\frac{5}{24}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{18}{1}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{24}{5}$
$\frac{8}{45}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{36}$					$\frac{36}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{45}{8}$
$\frac{45}{1}$	$\frac{20}{9}$	$\frac{18}{5}$					$\frac{5}{18}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{45}$
$\frac{2}{45}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{15}{2}$					$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{45}{2}$
$\frac{45}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{60}$					$\frac{60}{1}$	$\frac{12}{1}$	$\frac{4}{45}$
$\frac{3}{20}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{20}{1}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{1}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{20}{3}$
40/[illegible]	$\frac{4}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{15}{1}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{40}$
$\frac{8}{5}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{40}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{9}{8}$	[illegible]/4	8/[illegible]	$\frac{1}{24}$	$\frac{8}{15}$

图 $B63$

$$\because \frac{(360B)^4}{42 \times 196 \times 2 \times 27} = F$$

即 $\frac{360 \times 360 \times 360 \times 360 \times B^4}{42 \times 196 \times 2 \times 27} = \frac{10^2 \times 360^2 \times B^4}{7^3} = F$

$\therefore B = 7, F = 10^2 \times 360^2 \times 7,$

又因 $360 \times 7 = 2520$ 故以 2520 乘图 $B63$ 中的分数可得图 $B64$

4725	6720	2800	567	4536	2240	672	315	60480	1575
504	1260	7560	1680	11340	3360	168	25200	630	12600
525	1512	2016	6300	8400	420	45360	126	4200	12096
448	2100	350					18144	3024	14175
113400	5600	9072					700	1134	56
112	5670	18900					336	1120	56700
28350	210	42					151200	30240	224
378	6048	50400	1008	756	15120	140	3150	1050	16800
33600	10080	840	3780	560	1890	37800	252	5040	189
4032	945	2268	11200	1400	2835	9450	20160	105	1344

图 $B64$

因:16 格图的 a 值中有 42 与 100 格图外三层数字重复,

16 格图的 b 值中有 56 与 100 格图外三层数字重复,

而 c 和 d 值没有与 100 格图外三层数字重复,

故只须把 $F = 10^2 \times 360^2 \times 7 = 90720000$ 适当地分为二个因数,分别乘 a 和 b 各数,经计算并对照各数字后可取:

$90720000 = 45000 \times 2016$,

以 45000 乘 a 各值得到:1890000,810000

1260000,945000

以 2016 乘 b 各值得到:395136,790212,

72576,112896

可填成图 $B65$。每行 10 数之积 $= 2520^{10}$

4725	6720	2800	567	4536	2240	672	315	60480	1575
504	1260	7560	1680	11340	3360	168	25200	630	12600
525	1512	2016	6300	8400	420	45360	126	4200	12096
448	2100	350	112896	147	3	810000	18144	3024	14175
113400	5600	9072	6	1890000	395136	9	700	1134	56
112	5670	18900	945000	2	27	790272	336	1120	56700
28350	210	42	63	72576	1260000	7	151200	30240	224
378	6048	50400	1008	756	15120	140	3150	1050	16800
33600	10080	840	3780	560	1890	37800	252	5040	189
4032	945	2268	11200	1400	2835	9450	20160	105	1344

图 $B65$

习题

1. 将前面第十四章习题第 10 题至第 21 题的填图要求改为每行【或每圆圈】数字之积都相等，但不强求数字为连续数。

2. 将下面各图填空，要求每行数字之积都相等。

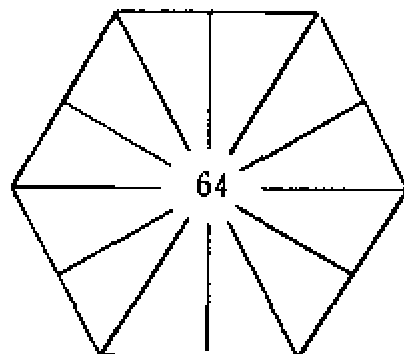


图 B 题 1

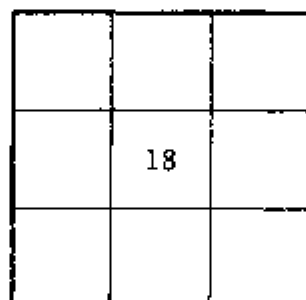


图 B 题 2

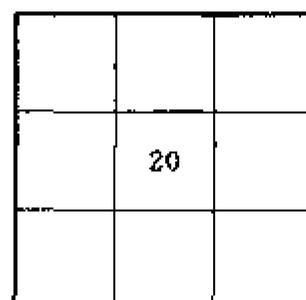


图 B 题 3

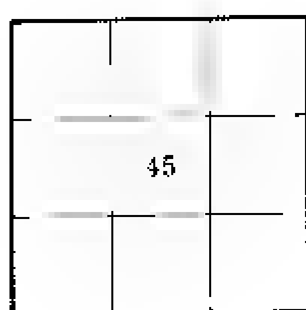


图 B 题 4

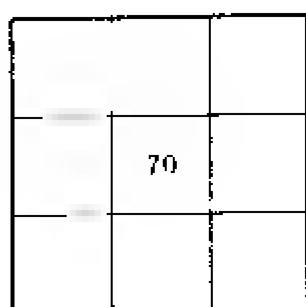


图 B 题 5

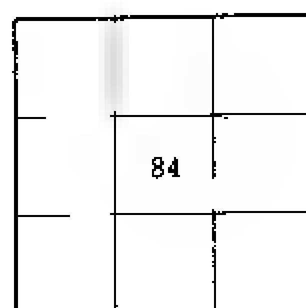


图 B 题 6

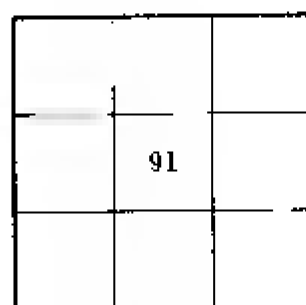


图 B 题 7

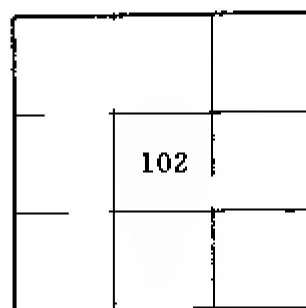


图 B 题 8

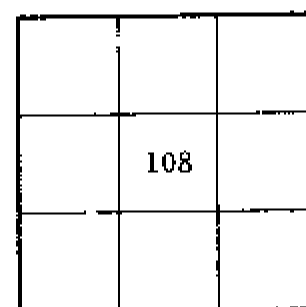
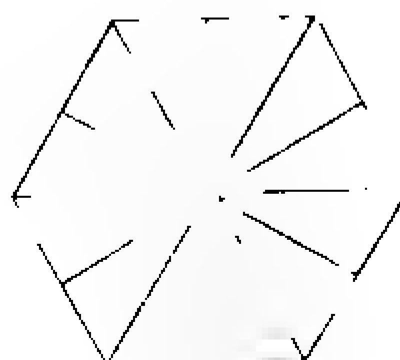
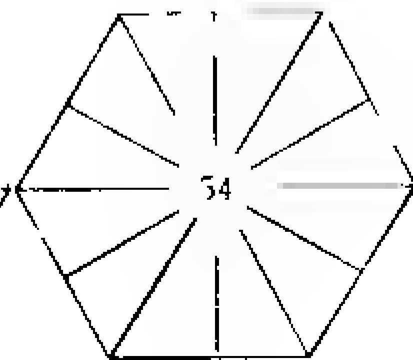
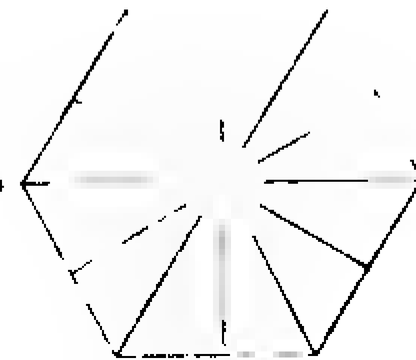


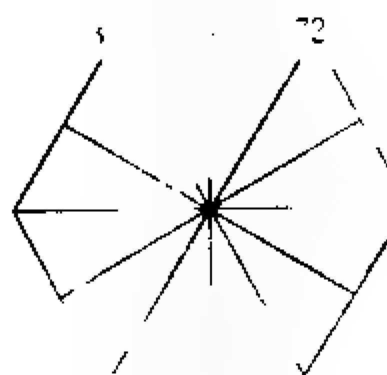
图 B 题 9

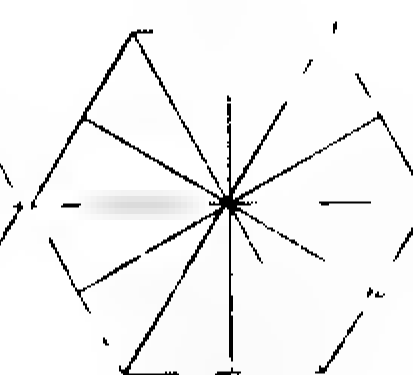

图B题

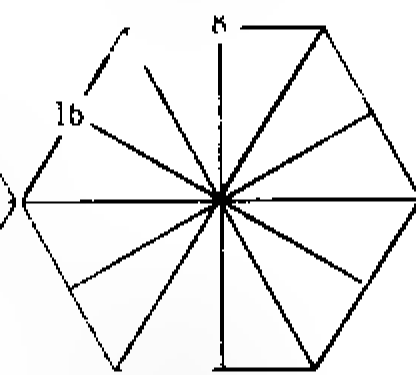


图B题11


图B题 2







B题15

图 B 题 16

图 B 题 17

图 B 题 18

图 B 题 19

图 B 题 20

图 B 题 21

图 B 题 22

图 B 题 23

图 B 题 24

图 B 题 25

图 B 题 26

图 B 题 27

		18	
9			

图 B 题 28

			6
		4	

图 B 题 29

	24	4	
	20	180	

图 B 题 30

8	60	5	6

图 B 题 31

338	9	2028	36	16
6				1014
117				52
26				234
468	676	3	169	18

图 B 题 32

	2	225	60	
	900	30	1	
	15	4	450	

图 B 题 33

315	70	735	180	980	30
35					1260
90					490
2940					15
20					2205
1470	630	60	245	45	140

图 *B* 题 34

	20	10800	60	14641	
	660	1331	18	12000	
	11979	600	13200	2	
	1200	22	13310	540	

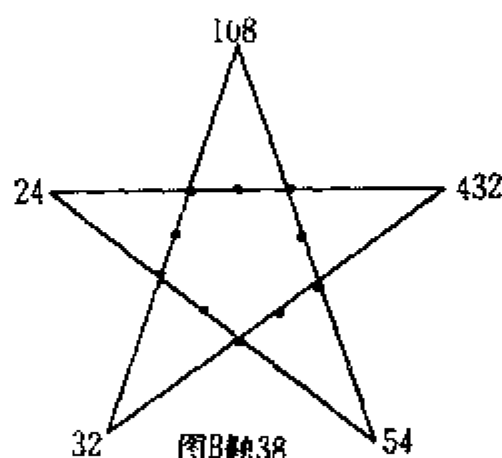
图 *B* 题 35

9			1764			5
	6		882		20	
		105	44100	2		
49	6300	4	210	11025	7	90
		22050	1	420		
	2205		50		7350	
8820			25			4900

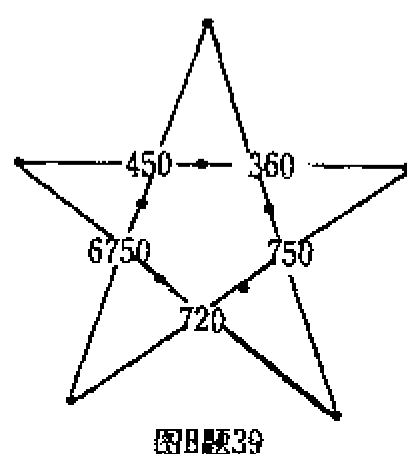
图 *B* 题 36

900	9	4800	4	576	5	800
32						450
225		600	2	1440		64
2400		288		50		6
8		10	7200	24		1800
160						90
18	1600	3	3600	25	2880	16

图 *B* 题 37

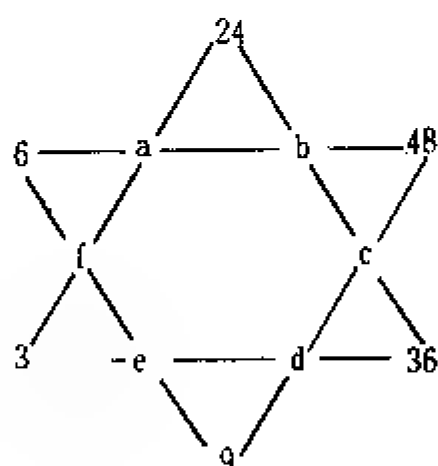


图B题38

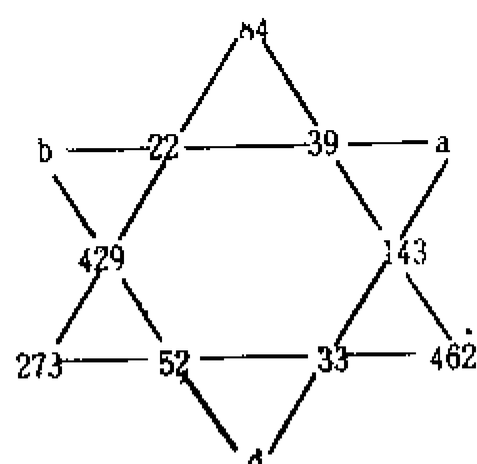


图B题39

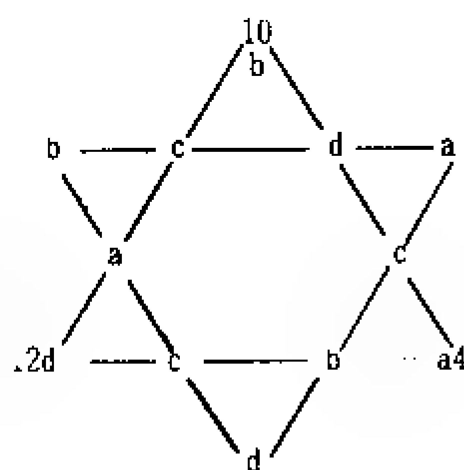
五角星图五个顶角、五个交叉点、中间五点、每行五点，它们的五数之积都相等。



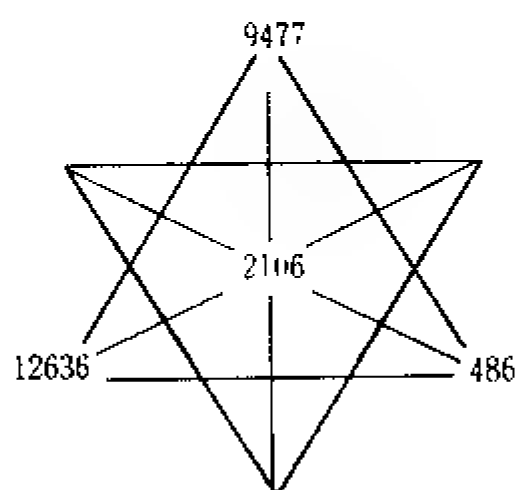
图B题40



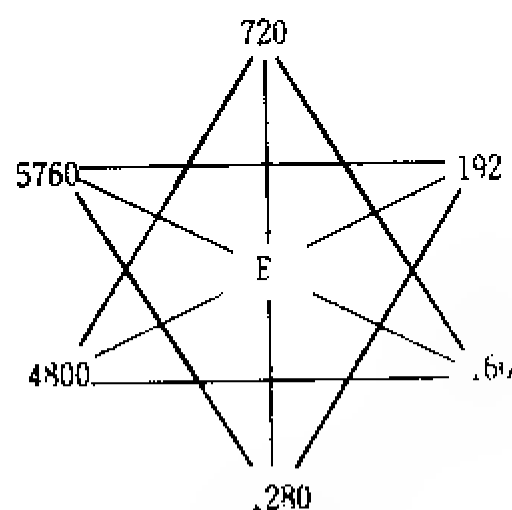
图B题41



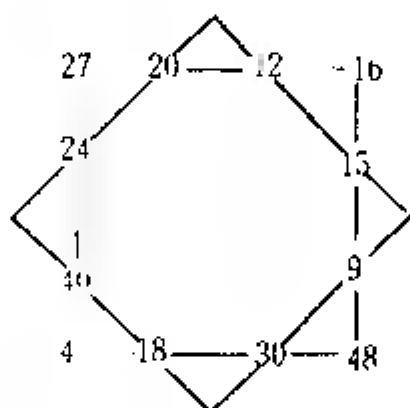
图B题42



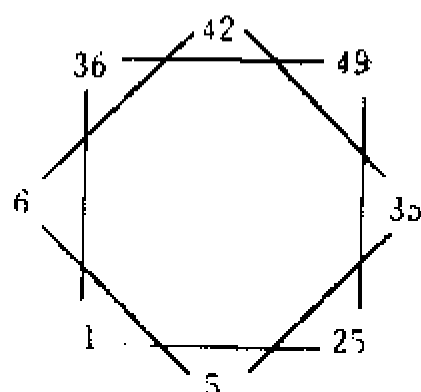
图B题43



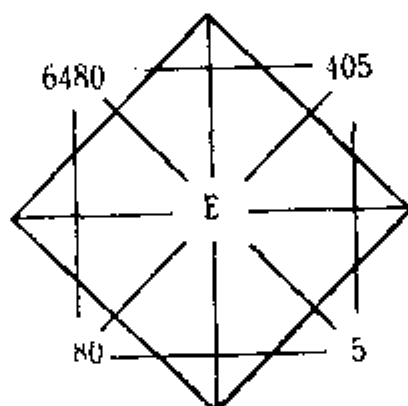
图B题44



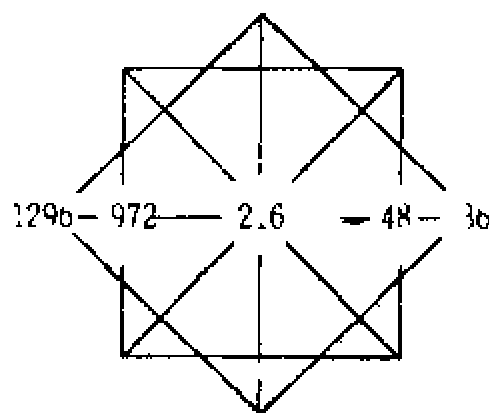
图B题45



图B题46



图B题47



图B题48

图 *B* 题 47　　　　图 *B* 题 48

3. 如取以下各数为方形图的中心数字【方形图要求每行数字之积都相等】试运用“求T公式”和查表【方形图中心数字表】计算出这些数字各有多少个T，可选为对称数?【请先参阅第十五章第一节后才作此题】

500，576，625，686，700，840，

975，1001，2310，6859。

4. 用“求T法”将以下各数的“分数”列出来，并用“求T公式”测算检查有否遗漏或错列。【请先参阅第十五章第一节后才作此题】

416，420，456，480，501，3888。

5. 由 301 至 400，哪些数是有 40 个 T？17 个 T？37 个 T？【请先参阅第十五章第一节后才作此题】

第十六章　特加讲题

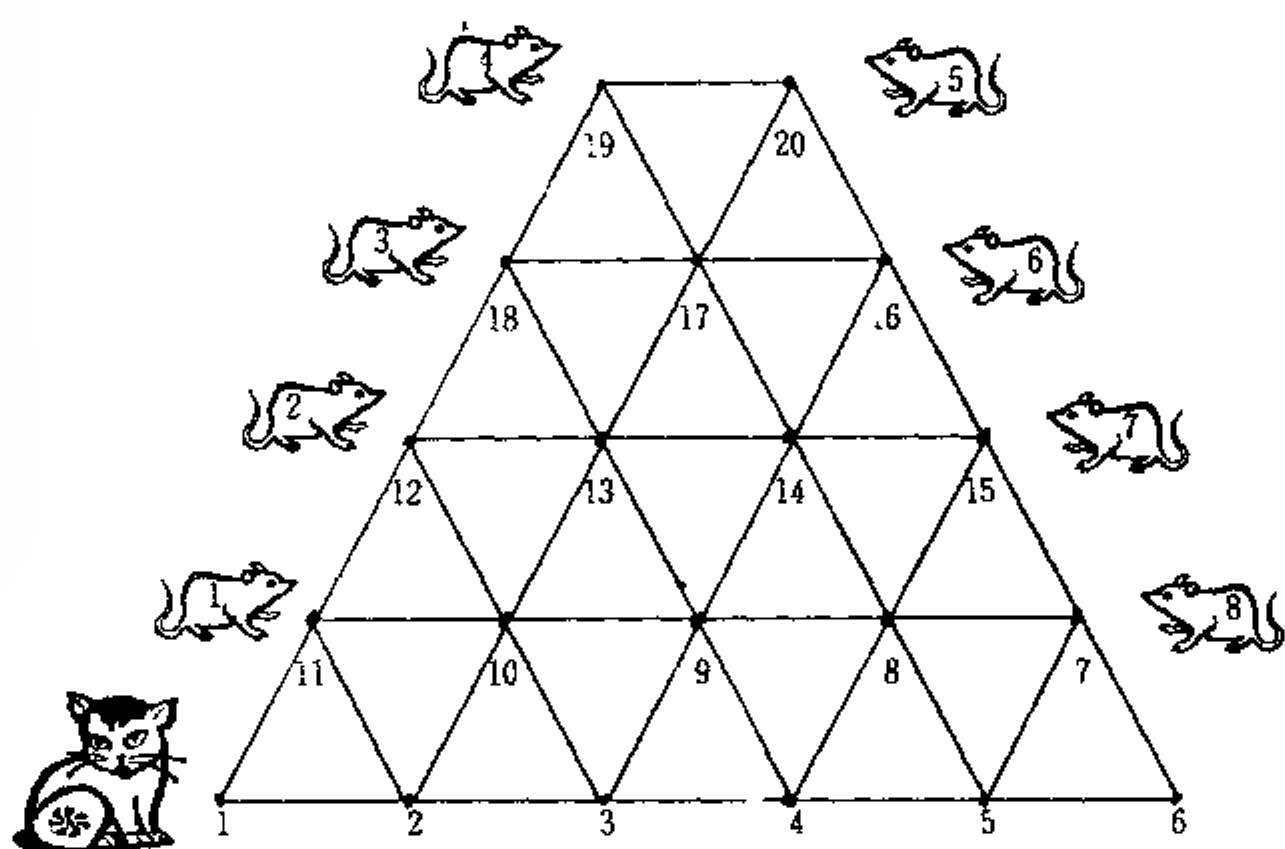
为了增加青少年读者的学习兴趣和扩大其思维境界，同时也是为了锻炼和发挥其推理能力，特再选几个课题进行分解。

第一节　猫捕鼠图

有一只花猫，按以下图，由底层按数字顺序寻捕老鼠，回程则按数字逆序，每层两端点外都有一只老鼠，老鼠按内斜线来回走动，猫和老鼠入图后都不再出图外，它们行走速度如表，猫和老鼠站在图外的一点上，已知由图外这一点到入图第一点，猫和老鼠所需要的时间，分别和图内每到达一点的时间相等。现在猫和老鼠同在夜间零时从图外这点上开始行动，试算出猫最早抓住老鼠的时间和点位。

每到达一点位 \ 所需要的时间	猫	1 号鼠	2 号鼠	3 号鼠	4 号鼠	5 号鼠	6 号鼠	7 号鼠	8 号鼠
	1 分钟	2 分钟	3 分钟	4 分钟	5 分钟	2 分钟	3 分钟	4 分钟	5 分钟

图 C1



图C2

我们将猫第一次到达的各个点位叫原点位【如图中的点位和数字】,因有 20 个点,故有 20 个点位,猫每分钟走一个点位,依题意原点位上的数字,就是猫第一次到达这个点位所需要的时间,【也是这点位的号位】,由分析得知,猫的行程有两种情况,第一种是按照原去的路程逆回走,例如猫从图外走入图内,沿顺序走到 20 号位后倒回到 17 号位的总共时间就是 20 × 2 17 = 23;第二

种是去程从某一点位起，走完第20号位，倒回1号位再到某点位所需要的时间，例如这某点位是17号位，即由17号去到20号倒回1号再到达17号，共需时间是(20 − 1)×2 = 38，由此得知，猫的行程时间公式应分为去程和回程，即：

回程时间 = 20×2 − 原点位 + (20 − 1)2k，

去程时间 = 原点位 + (20 − 1)2k

其中 k = 0,1,2,3,……

至于老鼠的行程时间，也分为去程和回程两种公式，因老鼠活动的点位和点的数量各自不同，行动速度也不同，因此，猫要抓到老鼠，就要计算出猫和老鼠相遇在这一点位的共同时间，现在分别计算如下：

1号老鼠活动的点位和次数

1，3，……………………………1 + 2a

2，4，……………………………2 + 2a(实则 2a)

以上的点位表示1号老鼠活动的点位，点位旁边的数字，表示它到达这点位是第几次，每到达一点位需要2分钟，故旁边数字乘以2，就是它到达这点位的时间，接着写的是它到达这点位的次数的计算公式，其中 a = 0,1,2,…，例如它第2次到达1号点位是3，则1 + 2×1 = 3(a = 1)，其余类推，次数是连续计算的。【以下均同】

猫到达1号老鼠活动的点位和时间

11，29，49，67，…，去程公式：11 + 38k，回程公式 29 + 38k

2，38，40，76，…，去程公式：2 + 38k，回程公式 38k

以上的点位表示猫到达1号老鼠活动的点位，点位旁边的数字，表示它到达这点位是第几点次，因为每到达1点位用1分钟，故这数字也表示时间，接着写的是它再到达这点位的计算公式【以后每个老鼠和猫到达的点位和时间所画的图和点位旁边的数字和公式都是同此表示，不须再赘述】。

因为1号老鼠每到一个点位需要2分钟，那么，它所到达11号位的时间就是$2(1+2a)$，它所到达2号位的时间就是$2\times 2a$。而猫要抓到1号老鼠，就是在同一时间同一点位上相遇，如果在11号位相遇，其时间则由下列方程式求出：

即　$2(1+2a)=11+38k$　　①

和　$2(1+2a)=29+38k$　　②

如果在2号位相遇，其时间则由下列方程式求出：

即　$2\times 2a=2+38k$　　③

和　$2\times 2a=38k$　　④

以上四式是不定方程，求取最小正整数解。

现分别演解如下：

由①整理：$4a=9+38k$，　$\because (38,4)=2\nmid 9$，$\therefore$ 此式无整数解

由②整理：$4a=27+38k$，　$\because (38,4)=2\nmid 27$，$\therefore$ 此式无整数解

由③整理：$2a=1+19k$，

由本书第一部分的第一章第二节(四)和上式可解得：

$k=1$，将其代入 $2+38k$ 得到40

由④整理：$2a=19k$，同理解得 $k=2$，将其代入 $38k$ 得到76，不能取 $k=a=0$，因为等于0表示它们尚未开始行动。

由上得知，猫在40、76二个时间都能抓住1号老鼠，但40较小，即在当夜零时40分第二次去程时间在第2号位上抓住1号老鼠。

2号老鼠活动的点位和次数

1，5，5，……　$1+4a$

2，4，6，……　去程公式 $2+4a$，回程公式 $4a$

3，3，7，……　$3+4a$

猫到达2号老鼠活动的点位和时间

12，28，……　去程公式　$12 + 38k$，回程公式 $28 + 38k$

10，30，……　去程公式　$10 + 38k$，回程公式 $30 + 38k$

3，37，……　去程公式　$3 + 38k$，回程公式 $37 + 38k$

仿上例有以下方程：

$3(1 + 4a) = 12 + 38k$　　此式无整数解

$3(1 + 4a) = 28 + 38k$　　此式无整数解

$3(2 + 4a) = 10 + 38k$　解得 $k = 4$ 将其代入 $10 + 38k$ 得 162，

$3(2 + 4a) = 30 + 38k$　解得 $k = 0$ 将其代入 $30 + 38k$ 得 30，

$3(4a) = 10 + 38k$　解得 $k = 1$ 将其代入 $10 + 38k$ 得 48，

$3(4a) = 30 + 38k$　解得 $k = 3$ 将其代入 $30 + 38k$ 得 144，

$3(3 + 4a) = 3 + 38k$　解得 $k = 3$ 将其代入 $3 + 38k$ 得 117，

$3(3 + 4a) = 37 + 38k$　解得 $k = 4$ 将其代入 $37 + 38k$ 得 189，

猫有 6 个时间【如上】能抓住 2 号老鼠，取最早时间是零时 30 分第一次回程时间在第 10 号位上。

3 号老鼠活动的点位和次数

1，7，7，……　$1 + 6a$

2，6，8，……　去程公式：$2 + 6a$，回程公式：$6a$

3，5，9，……　去程公式：$3 + 6a$，回程公式 $5 + 6a$

4，4，10，……　$4 + 6a$

猫到达 3 号老鼠活动的点位和时间

18，22，……　去程公式：$18 + 38k$，回程公式：$22 + 38k$

13，27，……　去程公式：$13 + 38k$，回程公式：$27 + 38k$

9，31，……　去程公式：$9 + 38k$，回程公式：$31 + 38k$

4，36，……　去程公式：$4 + 38k$，回程公式：$36 + 38k$

仿上例有以下方程：

$4(1 + 6a) = 18 + 38k$

上式的解法，可用本书第一部分第一章第二节（五）的方法解得：$k = 11$，将其代入 $18 + 38k$ 得：436

$4(1+6a)=22+38k$，解得：$k=9$，将其代入 $22+38k$ 得 364，

$4(2+6a)=13+38k$　此式没有整数解

$4(2+6a)=27+38k$　此式没有整数解

$4(6a)=13+38k$　此式没有整数解

$4(6a)=27+38k$　此式没有整数解

$4(3+6a)=9+38k$　此式没有整数解

$4(3+6a)=31+38k$　此式没有整数解

$4(5+6a)=9+38k$　此式没有整数解

$4(5+6a)=31+38k$　此式没有整数解

$4(4+6a)=4+38k$　解得 $k=6$，将其代入 $4+38k$ 得 232

$4(4+6a)=36+38k$　解得 $k=2$，将其代入 $36+38k$ 得 112

猫有 4 个时间均可抓到第 3 号老鼠，取最早时间是 112 分，即当夜 1 点 52 分第三次回程时间在第 4 号位上。

4 号老鼠活动的点位和次数

1，9，9，……　$1+8a$

2，8，10，……　去程公式：$2+8a$，回程公式：$8a$

3，7，11，……　去程公式：$3+8a$，回程公式：$7+8a$

4，6，12，……　去程公式：$4+8a$，回程公式：$6+8a$

5，5，13，……　$5+8a$

猫到达 4 号老鼠活动的点位和时间

19，21，……　去程公式：$19+38k$，回程公式：$21+38k$

17，23，……　去程公式：$17+38k$，回程公式：$23+38k$

14，26，……　去程公式：$14+38k$，回程公式：$26+38k$

8，32，……　去程公式：$8+38k$，回程公式：$32+38k$

5，35，……　去程公式：$5+38k$，回程公式：$35+38k$

仿上例有以下方程

$5(1+8a)=19+38k$　解得 $k=7$，将其代入 $19+38k$ 得 285

$5(1+8a)=21+38k$　解得 $k=8$，将其代入 $21+38k$ 得 325

$5(2+8a)=17+38k$　此式没有整数解

$5(2+8a)=23+38k$　此式没有整数解

$5(8a)=17+38k$　此式没有整数解

$5(8a)=23+38k$　此式没有整数解

$5(3+8a)=14+38k$　此式没有整数解

$5(3+8a)=26+38k$　此式没有整数解

$5(7+8a)=14+38k$　此式没有整数解

$5(7+8a)=26+38k$　此式没有整数解

$5(4+8a)=8+38k$　解得 $k=14$ 将其代入 $8+38k$ 得 540

$5(4+8a)=32+38k$　解得 $k=6$ 将其代入 $32+38k$ 得 260

$5(6+8a)=8+38k$　解得 $k=9$ 将其代入 $8+38k$ 得 350

$5(6+8a)=32+38k$　解得 $k=1$ 将其代入 $32+38k$ 得 70

$5(5+8a)=5+38k$　解得 $k=10$ 将其代入 $5+38k$ 得 385

$5(5+8a)=35+38k$　解得 $k=5$ 将其代入 $35+38k$ 得 225

猫有8个时间均可抓到第4号老鼠，取最早时间是70分，即当夜1点10分第二次回程时间在第8号位上。

5号老鼠活动的点位和次数

1，9，……　$1+8a$

2，8，……　去程公式：$2+8a$，回程公式：$8a$

3，7，……　去程公式：$3+8a$，回程公式：$7+8a$

4，6，……　去程公式：$4+8a$，回程公式：$6+8a$

5，5，……　$5+8a$

猫到达5号老鼠活动的点位和时间

20，20，58，……　$20+38k$

17，23，55，……　去程公式：$17+38k$，回程公式：$23+38k$

13，27，51，……　去程公式：$13+38k$，回程公式：$27+38k$

10，30，48，……　去程公式：$10+38k$，回程公式：$30+38k$

2，38，40，……　去程公式：$2+38k$，回程公式：$38k$

仿上例有以下方程：

$2(1+8a)=20+38k$　解得 $k=$ [illegible] 将其代入 $20+38k$ 得 [illegible]

$2(2+8a)=17+38k$　此式没有整数解

$2(2+8a)=23+38k$　此式没有整数解

$2(8a)=17+38k$　此式没有整数解

$2(8a)=23+38k$　此式没有整数解

$2(3+8a)=13+38k$　此式没有整数解

$2(3+8a)=27+38k$　此式没有整数解

$2(7+8a)=13+38k$　此式没有整数解

$2(7+8a)=27+38k$　此式没有整数解

$2(4+8a)=10+38k$　解得 $k=5$ 将其代入 $10+38k$ 得 200

$2(4+8a)=30+38k$　解得 $k=7$ 将其代入 $30+38k$ 得 296

$2(6+8a)=10+38k$　解得 $k=3$ 将其代入 $10+38k$ 得 124

$2(6+8a)=30+38k$　解得 $k=5$ 将其代入 $30+38k$ 得 220

$2(5+8a)=2+38k$　解得 $k=4$ 将其代入 $2+38k$ 得 154

$2(5+8a)=38k$　解得 $k=7$ 将其代入 $38k$ 得 266

猫有 7 个时间均能抓到第 5 号老鼠，取最早的时间是 124 分，即当夜 2 点零 4 分第四次去程时间在第 10 号位上。

6 号老鼠活动的点位和次数

1，7，……　$1+6a$

2，6，……　去程公式：$2+6a$，回程公式：$6a$

3，5，……　去程公式：$3+6a$，回程公式：$5+6a$

4，4，……　$4+6a$

猫到达 6 号老鼠活动的点位和时间

16，24，54，…　去程公式：$16+38k$，回程公式：$24+38k$

14，26，52，…　去程公式：$14+38k$，回程公式：$26+38k$

9，31，47，…　去程公式：$9+38k$，回程公式：$31+38k$

3，37，41，…　去程公式：$3+38k$，回程公式：$37+38k$

仿上例有以下方程：

$3(1+6a)=16+38k$　此式没有整数解

$3(1+6a)=24+38k$　此式没有整数解

$3(2+6a)=14+38k$　解得 $k=5$ 将其代入 $14+38k$ 得 204

$3(2+6a)=26+38k$　解得 $k=8$ 将其代入 $26+38k$ 得 330

$3(6a)=14+38k$　解得 $k=2$ 将其代入 $14+38k$ 得 90

$3(6a)=26+38k$　解得 $k=5$ 将其代入 $26+38k$ 得 216

$3(3+6a)=9+38k$　解得 $k=0$ 将其代入 $9+38k$ 得 9

$3(3+6a)=31+38k$　解得 $k=7$ 将其代入 $31+38k$ 得 297

$3(5+6a)=9+38k$　解得 $k=3$ 将其代入 $9+38k$ 得 123

$3(5+6a)=31+38k$　解得 $k=1$ 将其代入 $31+38k$ 得 69

$3(4+6a)=3+38k$　此式没有整数解

$3(4+6a)=37+38k$　此式没有整数解

猫有 8 个时间均能抓到 6 号老鼠，取最早时间是 9，即当夜零时 9 分第一次去程时间在第 9 号位上。

7 号老鼠活动的点位和次数

1,5,5,…　$1+4a$

2,4,6,…　去程公式：$2+4a$，回程公式 $4a$

3,3,7…　$3+4a$

猫到达 7 号老鼠活动的点位和时间

15,25,53,…　去程公式：$15+38k$，回程公式：$25+38k$

8,32,46,…　去程公式：$8+38k$，回程公式：$32+38k$

4,36,42,…　去程公式：$4+38k$，回程公式：$36+38k$

仿上例有以下方程：

$4(1+4a)=15+38k$　此式没有整数解

$4(1+4a)=25+38k$　此式没有整数解

$4(2+4a)=8+38k$　解得 $k=0$，将其代入 $8+38k$ 得 8

$4(2+4a)=32+38k$　解得 $k=4$，将其代入 $32+38k$ 得 184

$4(4a)=8+38k$　解得 $k=4$，将其代入 $8+38k$ 得 160

$4(4a)=32+38k$　解得 $k=0$，将其代入 $32+38k$ 得 32

$4(3+4a)=4+38k$　解得 $k=4$，将其代入 $4+38k$ 得 156

$4(3+4a)=36+38k$　解得 $k=4$，将其代入 $36+38k$ 得 188

猫有 6 个时间均能抓到第 7 号老鼠，取最早时间为 8 分，即当夜零时 8 分第一次去程时间在第 8 号位上。

8 号老鼠活动的点位和次数

$\begin{cases} 1,3,\cdots & 1+2a \\ 2,4,\cdots & 2+2a(\text{实 } 2a) \end{cases}$

猫到达 8 号老鼠活动的点位和时间

$\begin{cases} 7,33,45,\cdots & \text{去程公式：} 7+38k\text{，回程公式：} 33+38k \\ 5,35,43,\cdots & \text{去程公式：} 5+38k\text{，回程公式：} 35+38k \end{cases}$

仿上例有以下方程：

$5(1+2a)=7+38k$，解得 $k=1$ 将其代入 $7+38k$ 得 45

$5(1+2a)=33+38k$，解得 $k=4$ 将其代入 $33+38k$ 得 185

$5(2a)=5+38k$，此式没有整数解

$5(2a)=35+38k$，此式没有整数解

猫有 2 个时间均能抓到第 8 号老鼠，取最早时间是 45 分，即当夜零点 45 分第二次去程时间在第 7 号位上。

至此，全部 8 只老鼠都被猫抓住。

这一节主要目的是培养学者对数题的分析能力，使其明白猫要抓到老鼠，就是求猫鼠相遇的时间和点位。但这不同于时钟中的长短针相重，也不同于在同一圆周上相背而走的相遇，因为猫鼠的行程不同，但行程有交叉点，猫要抓到老鼠，必须相碰在这个交叉点上，什么时候相碰，首先要计算出猫有几个时间到达这个交叉点，同时也要计算老鼠有几个时间到达这个交叉点，然后在这些时间中取出相同的时间，为了达到这个要求，即应用不定方程求解。本课题不畏繁复，特设多只老鼠加入计算，目的是使学者养成耐

心、细致的学习习惯，并省去方程解的演算过程，以便让读者自己去演解，藉此巩固和提高学习效果。

第二节　和尚分酒

瓶中有15两酒，由三个和尚分喝，大和尚抢先拿大碗，能把酒全部盛下，二和尚拿中碗，盛满是4两，小和尚迟到拿小碗，仅能盛3两。大和尚说："没有盛5两的碗，不能平分，你俩就各自倒满碗拿走，剩下的给我"。二和尚没办法，不做声；小和尚认为自己吃大亏，坚决不同意。小和尚算了一会，认为有办法平分，只见他将酒倒来倒去，结果平分了。小和尚分酒的方法是：

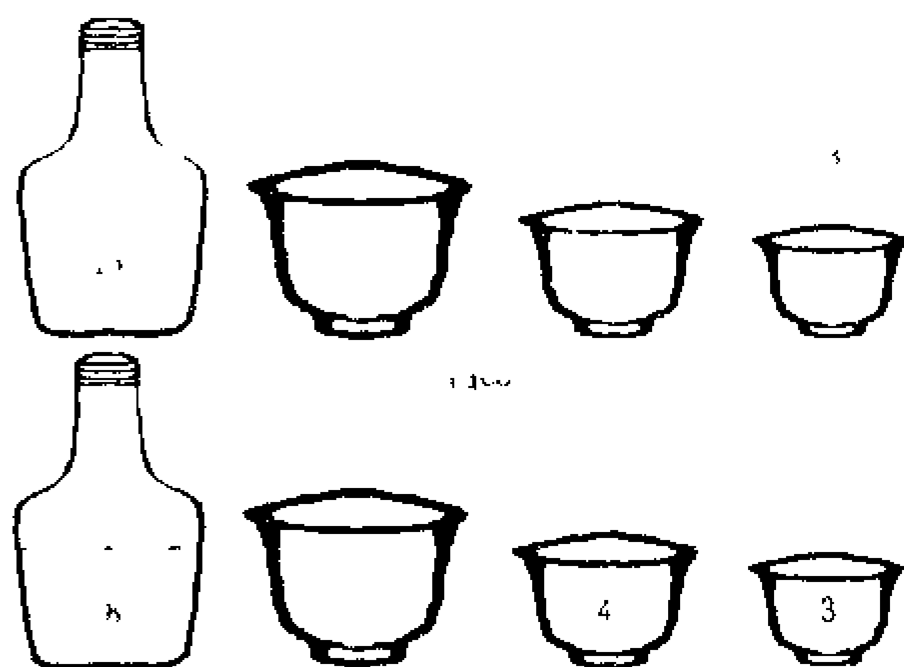


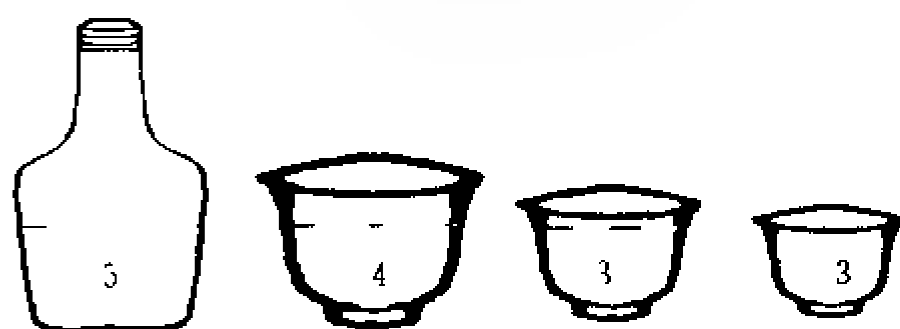
图4

先倒满中小二碗：



图C5

把中碗的酒倒入大碗，把小碗的酒倒入中碗；



图C6

把瓶中的酒倒满小碗；



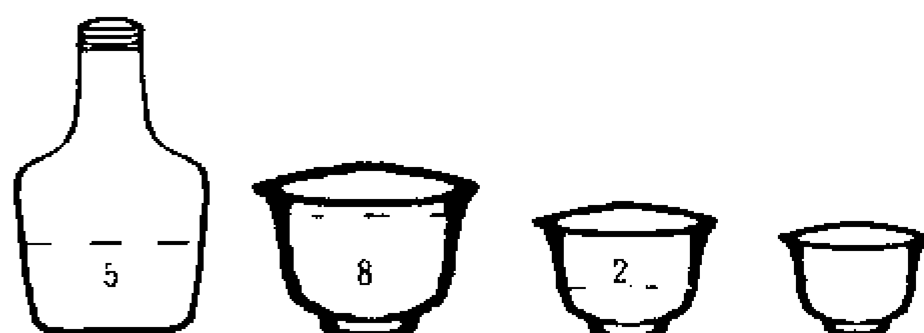
图C7

把小碗的酒倒满中碗；



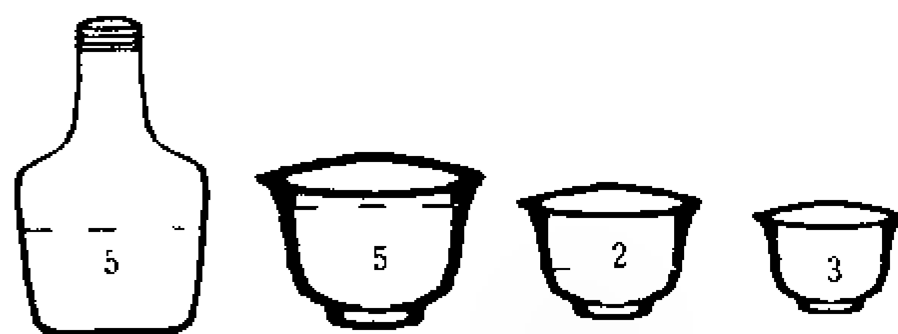
图C8

把中碗的酒倒入大碗；



图C9

把小碗的酒倒入中碗；



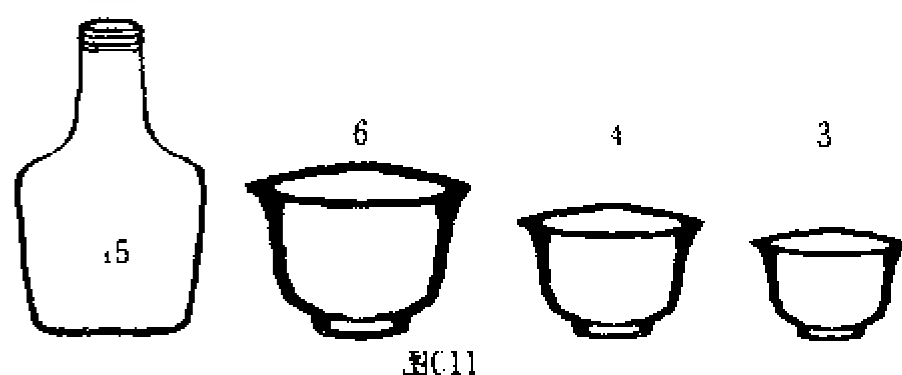
图C10

把大碗的酒倒满小碗；

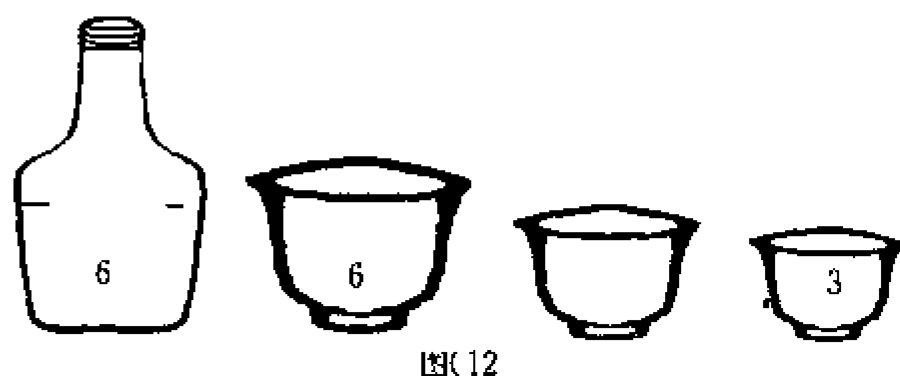
最后大和尚只好拿大碗中所分得的酒，二和尚也满意地拿中小碗的酒，小和尚则高高兴兴地端起瓶中酒大口大口的喝。

上次分酒，大和尚占不到便宜，心中很不是滋味，以为这是由于大碗太大，这次他特地换了一个只能容6两的大碗，瓶中仍旧有15两酒，他叫来二位师弟，他说："我只盛满大碗拿走，剩下的留你们分吧，否则，你们照各自盛满中小碗拿走，剩下的留给我。"说罢，耸耸二肩，满以为这次一定能难倒小和尚了。可是小和尚仍坚持要平分。

经盘算后，认为这次不能像上次那样分，上次是把瓶中酒倒入各碗后，先使瓶中剩5两，这次可不能，因为大碗较前小，这次要设法先把5两分到大碗，然后再设法使瓶中有9两，将9两再倒入中碗，就可以平分了，于是小和尚的分法是：



图C11



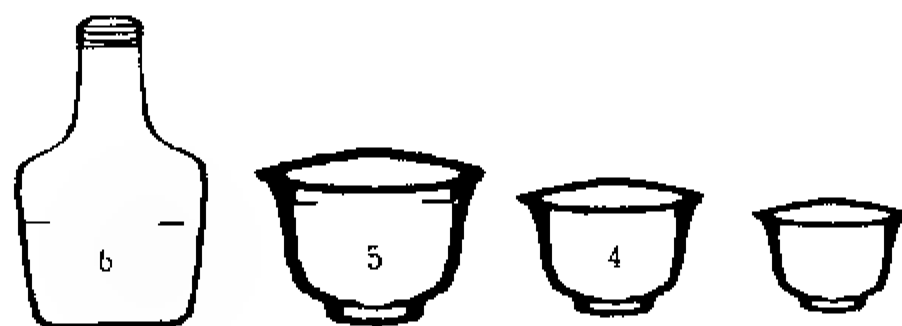
图C12

先把瓶中酒倒满大小碗



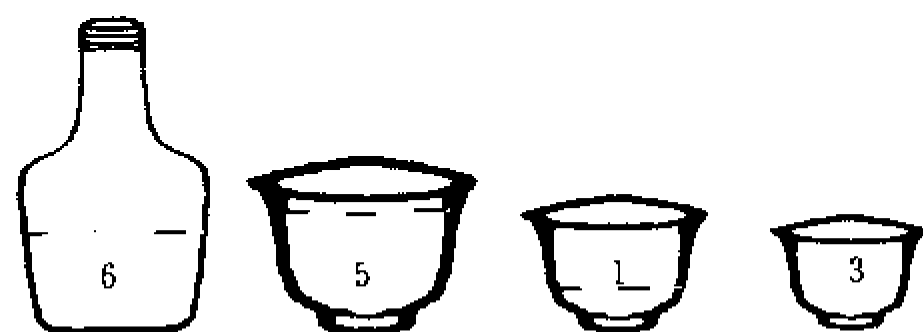
图、13

把大碗的酒倒满中碗



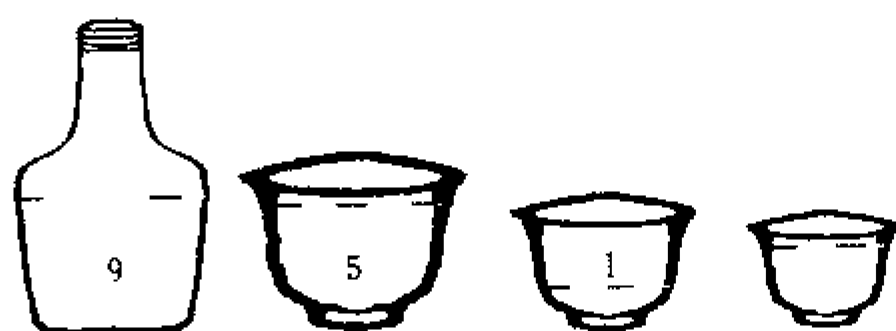
图(.4

把小碗的酒全部倒入大碗



图(.5

把中碗的酒倒满小碗



图C16

把小碗的酒倒回瓶中



图C17

把中碗的酒倒入小碗



图C18

把瓶中的酒倒满中碗

以后大和尚再也不捉弄小和尚了。小和尚又一次得意地开怀

畅饮。

这一节,最适合少年儿童。文中省去为什么要这样倒来倒去的解释,目的是让读者去分析理解。

第三节　傻子养鸽

据说傻子是愚公的后裔,他看过老祖先愚公移山的故事后,得到启发,在1990年国庆节这天,傻子特地到农贸市场选购一对种鸽。卖鸽的人说:“这对鸽子今天刚满30天,按常规,鸽子满150天就生育,以后每45天生育一对。”傻子决心养鸽致富。假设鸽子的成长率百分之百,同时每对都是一雄一雌,都能正常生育,试问到1992年8月底,傻子的鸽子总共有多少对?

解:鸽子满150天就生育,国庆节这对鸽子已满30天,即再过120天就生育了。从1990年10月2日起至1992年8月31日,共计699天,因此,这对鸽子达到699天,本身生育的数量【以对为计算单位,以下同】是:

$$\left[\frac{699-120}{45}\right]+1=13$$

【注:在数论中方括号[]表示整数部分,上式中的方括号内的数在运算时也只取整数部分。下同】

上式中为什么要加1呢?因为鸽子到达120天就生育第一对,括号内的数,只是计算以后每45天所生育的数量,还不含达到120天,这天所生的这一对,所以要加1。为了计算方便起见,把原初买来的这对鸽子,叫第一代,把它本身所生育的叫第二代,把第二代所生育的叫第三代……,如此等等。

现在我们就照这样去推论计算。

1　这是原初买来的1对,即第一代,请同时参阅图一,鸽子内的数字,是这鸽子出生的日期

$$\left[\frac{699-120}{45}\right]+1=13$$

这是原初这对鸽子总共生育的数量，即第二代。

$$\left[\frac{699-120-150}{45}\right]+1=10$$

这是第二代第一对鸽子共生育的数量，属第三代一部分。

$$\left[\frac{699-120-150-45}{45}\right]+1=9$$

这是第二代第二对鸽子共生育的数量，属第三代一部分

$$\left[\frac{699-120-150-45\times2}{45}\right]+1=8$$

这是第二代第三对鸽子共生育的数量，属第三代一部分

……………………………………

$$\left[\frac{699-120-150-45\times9}{45}\right]+1=1$$

这是第二代第十对鸽子所生育的数量，属第三代一部分，其余三对，因未满150天，尚未生育

故得到第三代鸽子的总数是由1至10的连续数之和：$\frac{1}{2}n(n+1)$

即以 $n=10$ 代入以上公式得到

$\frac{1}{2}\times10\times(10+1)=55$　　　　第三代鸽子总数

又因为：

$$\left[\frac{699-120-150\times2}{45}\right]+1=7$$

上式是第二代第一对即　生的第三代第一对　所生的子　这一排的鸽子数，属第四代一部分，

$$\left[\frac{699-120-150\times2-45}{45}\right]+1=6$$

上式是第二代第一对生的第三代第二对　所生的子　这一排的鸽子数，属第四代一部分

……………………………

$$\left[\frac{699 - 120 - 150 \times 2 - 45 \times 6}{45}\right] + 1 = 1$$

上式是第二代第一对生的第三代第七对 540 所生的子 690，其余二对未满 150 天尚未生育。

故得到第二代第一对生第三代再生的子，属第四代一部分的合计数，是由 1 至 7 的连续数之和：

即 $\frac{1}{2} \times 7 \times (7 + 1) = 28$。

又 $\frac{1}{2} \times 6 \times (6 + 1) = 21$

这是第二代第二对 65 的孙裔总数，属第四代一部分；

$\frac{1}{2} \times 5 \times (5 + 1) = 15$

这是第二代第三对 210 的孙裔总数，属第四代一部分；

$\frac{1}{2} \times 4 \times (4 + 1) = 10$

这是第二代第四对 255 的孙裔总数，属第四代一部分；

$\frac{1}{2} \times 3 \times (3 + 1) = 6$

这是第二代第五对 100 的孙裔总数，属第四代一部分；

$\frac{1}{2} \times 2 \times (2 + 1) = 3$

这是第二代第六对 145 的孙裔总数，属第四代一部分；

1

这是第二代第七对 390 的孙裔即 690，属第四代一部分，其余三对没有孙裔。

故得到第四代鸽子的总数是：

$$28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 84$$

又因为：

$$\left[\frac{699-120-150\times3}{45}\right]+1=3$$

上式是第二代第一对生的第一对再生的第一对又再生的这一排的数，属第五代一部分；

$$\left[\frac{699-120-150\times3-45}{45}\right]+1=2$$

上式是第二代第一对生的第一对再生的第二对又再生的这一排的数，属第五代一部分；

$$\left[\frac{699-120-150\times3-45\times2}{45}\right]+1=1$$

上式是第二代第一对生的第一对再生的第三对又再生的，属第五代一部分；

故得到第二代第一对生的第一对的孙裔总数是由 1 至 3 的连续数之和

即　$\frac{1}{2}\times3\times(3+1)=6$　　属第五代一部分；

又得到第二代第一对生的第二对的孙裔是由 1 至 2 的连续数之和

即　$\frac{1}{2}\times2\times(2+1)=3$　　属第五代一部分；

又得到第二代第一对生的第三对的孙裔数量是 1。属第五代一部分；

又得到第二代第二对生的第一对的孙裔数是由 1 至 2 的连续数之和

即　$\frac{1}{2}\times2\times(2+1)=3$　　属第五代一部分；

又得到第二代第二对生的第二对的孙裔数是 1，即：

又得到第二代第三对生的第一对的孙裔数是 1，即：。其余的还没有孙裔。

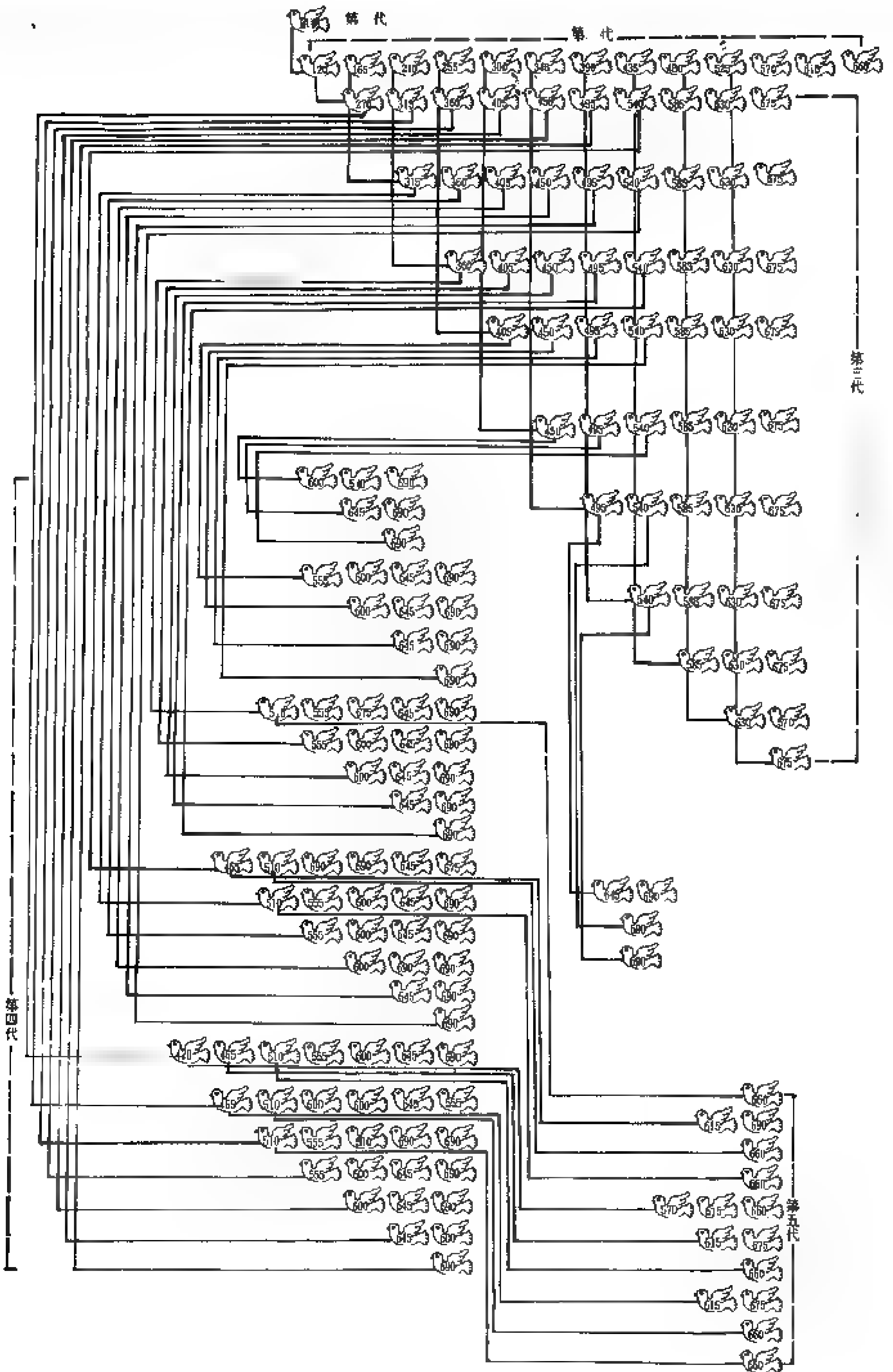
故得到第五代鸽子的总数是：

6 + 3 + 1 + 3 + 1 + 1 — 15

答：到 1992 年 8 月底傻子共养鸽子总数是， + 13 + 55 + 84 + 15 — 168 对。

附图：(图 C19)

1982年8月底傻子共养鸽子图示　　图C.9



每代【从第三代起】鸽子的总数都是个级数

前面我们利用图示的帮助，虽然达到了目的，但是靠图示毕竟是有限的，因此我们要从中找出它的规律，现在先讨论第四代和第五代鸽子数量的计算方法。

我们计算第四代鸽子总数是通过

$\left[\frac{699-120-150\times2}{45}\right]+1=7$ 式后求得的，这"7"是第二代的第一对所生第三代的第一对鸽子所生育的数量，接着"6"就是第二代第二对鸽子所生育的数量，……，每次递减1，到第七对所生育的是1。这"7"也指原初这对鸽子所生的第二代到699天，共有7对有孙裔，每对的孙裔数量是从"7"起递次减1的连续数之和，故第四代鸽子总数，排列起来就有形如(A)式：其中 $n=7$

1	$\frac{1}{2}(n-6)(n-5)=\frac{1}{2}\times1\times2$
1 2	$\frac{1}{2}(n-5)(n-4)=\frac{1}{2}\times2\times3$
1 2 3	$\frac{1}{2}(n-4)(n-3)=\frac{1}{2}\times3\times4$
1 2 3 4	$\frac{1}{2}(n-3)(n-2)=\frac{1}{2}\times4\times5$
1 2 3 4 5	$\frac{1}{2}(n-2)(n-1)=\frac{1}{2}\times5\times6$
1 2 3 4 5 6	$\frac{1}{2}(n-1)n=\frac{1}{2}\times6\times7$
1 2 3 4 5 6 7	$\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}\times7\times8$

从某级数部分之和公式已知：

$$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots\cdots=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \quad ①$$

因以上形如(A)式的级数之和是：

$\frac{1}{2}\times 1\times 2+\frac{1}{2}\times 2\times 3+\frac{1}{2}\times 3\times 4+\frac{1}{2}\times 4\times 5+\frac{1}{2}\times 5\times 6+\frac{1}{2}\times 6\times 7+\frac{1}{2}\times 7\times 8$

整理得到：$\frac{1}{2}(1\times 2+2\times 3+3\times 4+4\times 5+5\times 6+6\times 7+7\times 8)$ ②

将①式的右端代入②式得：$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

整理得到 $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ 其中 $n=7$ ③

故得到③式是求取第四代鸽子总数的级数公式。

我们计算第五代鸽子总数是通过

$$\left[\frac{699-120-150\times 3}{45}\right]+1=3$$

式后求得的。同理得知，这"3"就是第三代的第一对所生的第一对所生育的数量，接着"2"就是第二对子所生育的数量。这"3"也指第二代鸽子中有3对日龄较大的【即 120 65 215 有曾孙裔，故第五代鸽子总数排列起来就有

形如(B)式：

1 1 2 1 2 3	用公式③得，	$\frac{1}{6}\times 3\times 4\times 5$
1 1 2		$\frac{1}{6}\times 2\times 3\times 4$
1		$\frac{1}{6}\times 1\times 2\times 3$

由(B)式得到 $\frac{1}{6}(3\times 4\times 5+2\times 3\times 4+1\times 2\times 3)$ ④

又从某级数部分之和公式已知，

$$1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+\cdots\cdots=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) \quad ⑤$$

将⑤式右端代入④式得：

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

整理得：$\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)$　其中 $n=3$　⑥

故得到⑥式是求取第五代鸽子总数的级数公式。

我们继续讨论第六代鸽子总数的计算公式。现在只求再过820天第六代鸽子的总数。(令 M_6 为第六代鸽子数量的级数公式)并做图C20，由

$\left[\frac{820-120-150\times4}{45}\right]+1=3$ 式和参阅图C20得知，这“3”是第五代第一对鸽子570所生育的数量，也是第二代中有3对鸽子即 已有后裔达到第六代。它排列起来就有形如(C)式：

1　的后裔	$\frac{1}{24}\times1\times2\times3\times4$
1 12　1　的后裔	$\frac{1}{24}\times2\times3\times4\times5$
1 12　1　的后裔 123　12　1	$\frac{1}{24}\times3\times4\times5\times6$

连加起来：$\frac{1}{24}(1\times2\times3\times4+2\times3\times4\times5+3\times4\times5\times6)=M_6$　⑦

从某些级数的部分和公式已知：

$$1\times2\times3\times4+2\times3\times4\times5+\cdots\cdots\cdots\cdots=\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \quad ⑧$$

将⑧式的右端代入⑦式得到

$$\frac{1}{24}\times\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)=M_6$$

整理得：

$$\frac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)=M_6\text{，其中 } n\geq 3 \quad ⑨$$

故得到⑨式是计算第六代鸽子总数的级数公式。

现在我们再从以上讨论各式的关系中进行探索，并得到一个提示【暂令第一代鸽子总数的级数公式为M_1，第二代为M_2，第三代为M_3，……请注意，这里的M仅指公式，而不是指数量。】：

将M_4的公式除以M_3的公式　　得到$\frac{1}{3}(n+2)$

将M_5的公式除以M_4的公式　　得到$\frac{1}{4}(n+3)$

将M_6的公式除以M_5的公式　　得到$\frac{1}{5}(n+4)$

……………………

反过来，则：

M_3的公式 $\times\frac{1}{3}(n+2)$ 得到M_4的公式

M_4的公式 $\times\frac{1}{4}(n+3)$ 得到M_5的公式

M_5的公式 $\times\frac{1}{5}(n+4)$ 得到M_6的公式

……………………………

由此推论可得，各代鸽子总数的级数公式的关系是：

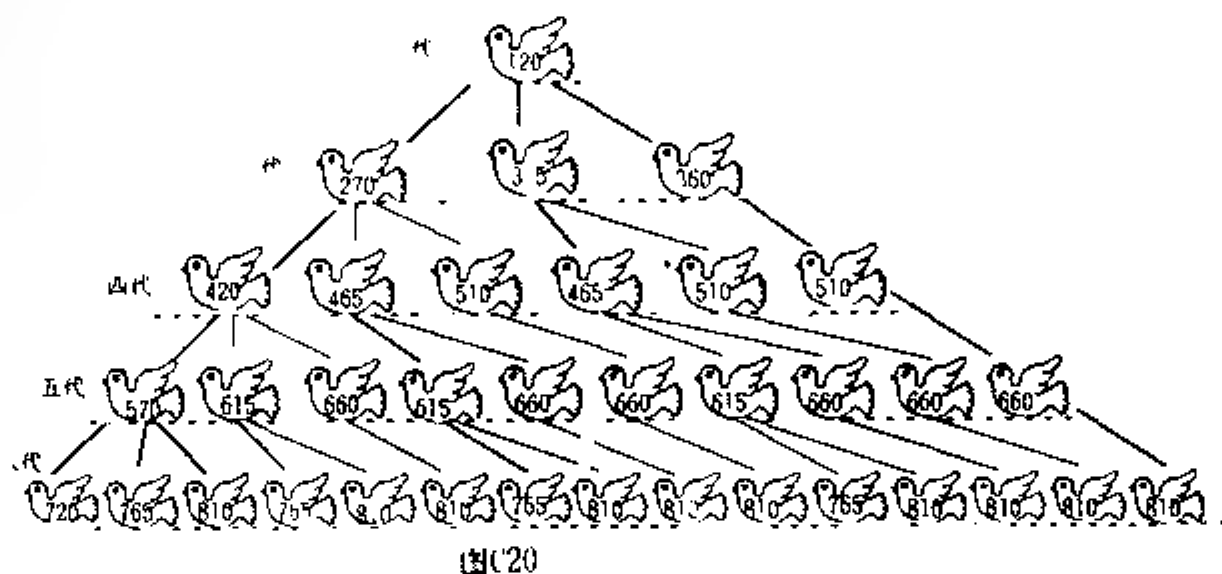
$M_{m-1}\times\frac{1}{m-1}[n+(m-2)]$ 得到 M_m

其中 $m>2$。

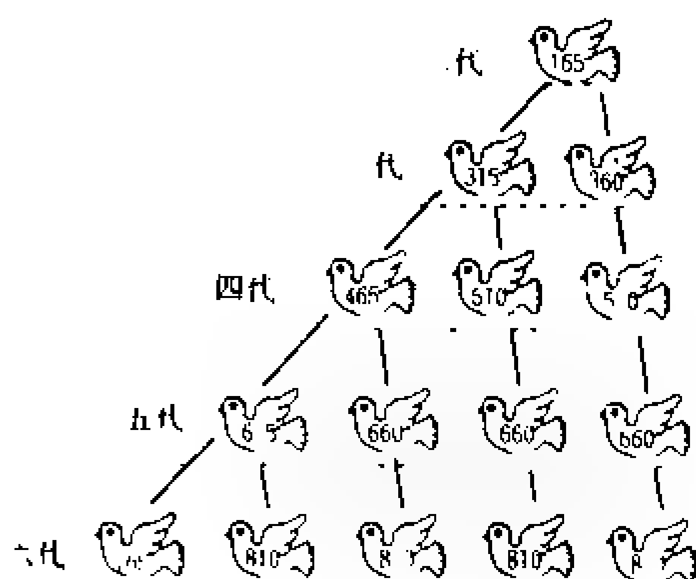
读者不妨验证当m大于6时的结果。

（由第810天至840天）第六代鸽子示意图

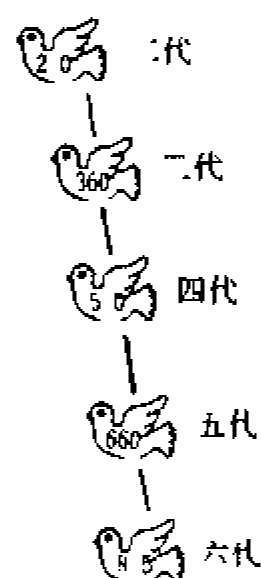
(由第810人至840人)第六代鸽子对色图



图C20



图C21



图C22

第二代第一对鸽子 的后裔（第六代）共15对

第二代第二对鸽子 的后裔（第六代）共5对

第二代第三对鸽子 的后裔（第六代）共1对

附各代鸽子总数的计算公式

第二代鸽子总数 n

第三代鸽子总数计算公式 $\frac{1}{2}n(n+1)$

第四代鸽子总数计算公式 $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

第五代鸽子总数计算公式 $\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)$

第六代鸽子总数计算公式 $\frac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$

第七代鸽子总数计算公式 $\frac{1}{720}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$

第八鸽子总数计算公式 $\frac{1}{5040}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)$

………………………………

$$M_m=\frac{1}{(m-1)!}n(n+1)\cdots(n+m-2)$$

以上式中：M_m代表第m代鸽子总数；n是上一代第一对鸽子生育数；$(m-1)!$是阶乘，是由1至$(m-1)$的连续数乘积。

$$n=\left[\frac{总天数-120-150\times(m-2)}{45}\right]+1。$$

鸽子生育一览表

计算单位：对

数量（对）/时间（天）	原初鸽	原初鸽生育的数量	第二代第一对生育数量	第三代第一对生育数量	第四代第一对生育数量	第五代第一对生育数量	第六代第一对生育数量	第三代鸽子总数	第四代鸽子总数	第五代鸽子总数	第六代鸽子总数	第七代鸽子总数	合共总数
属第几代	一	二	三	四	五	六	七		四	五	六	七	
120—164	1	1											2
165—209	1	2											3
210—254	1	3											4
255—269	1	4											5
270—299	1	4	1					1					6
300—314	1	5	1					1					7
315—344	1	5	2					3					9
345—359	1	6	2					3					10
360—389	1	6	3					6					13
390—404	1	7	3					6					14
405—419	1	7	4					10					18
420—434	1	7	4	1				10	1				19
435—449	1	8	4	1				10	1				20
450—464	1	8	5	1				15	1				25
465—479	1	8	5	2				15	4				28
480—494	1	9	5	2				15	4				29
495—509	1	9	6	2				21	4				35
510—524	1	9	6	3				21	10				41
525—539	1	10	6	3				21	10				42
540—554	1	10	7	3				28	10				49
555—569	1	10	7	4				28	20				59

570—584	1	11	7	4	1			28	20	1			61
585—599	1	11	8	4	1			36	20	1			69
600—614	1	11	8	5	1			36	35	1			84
615—629	1	12	8	5	2			36	35	5			89
630—644	1	12	9	5	2			45	35	5			98
645—659	1	12	9	6	2			45	56	5			119
660—674	1	13	9	6	3			45	56	15			130
675—689	1	13	10	6	3			55	56	15			140
690—704	1	13	10	7	3			55	84	15			168
705—719	1	14	10	7	4			55	84	35			189
720—734	1	14	11	7	4	1		66	84	35	1		201
735—749	1	14	11	8	4	1		66	120	35	1		237
750—764	1	15	11	8	5	1		66	120	70	1		273
765—779	1	15	12	8	5	2		78	120	70	6		290
780—794	1	15	12	9	5	2		78	165	70	6		335
795—809	1	16	12	9	6	2		78	165	126	6		392
810—824	1	16	13	9	6	3		91	165	126	21		420
825—839	1	16	13	10	6	3		91	220	126	21		475
840—854	1	17	13	10	7	3		91	220	210	21		560
855—869	1	17	14	10	7	4		105	220	210	56		609
870—884	1	17	14	11	7	4	1	105	286	210	56	1	676
885—899	1	18	14	11	8	4	1	105	286	330	56	1	797
900—914	1	18	15	11	8	5	1	120	286	330	126	1	882
915—929	1	18	15	12	8	5	2	120	364	330	126	7	966
930—944	1	19	15	12	9	5	2	120	364	495	126	7	1132
945—959	1	19	16	12	9	6	2	136	364	495	252	7	1274
960—974	1	19	16	13	9	6	3	136	455	495	252	28	1380
975—989	1	20	16	13	10	6	3	136	455	715	252	28	1607
990—1004	1	20	17	13	10	7	3	153	455	715	462	28	1834

这节主要目的仍然是希望读者对数题要认真分析，例如文中首先提醒读者注意："为什么要加1"。因为这类情况，往往会被一时忽略，造成功亏一篑。至于各代鸽子的数量都是一个级数，并用图示帮助推理，同时用"某些级数部分和公式"以及计算过程得到提示，从而推导出每代鸽子的计算公式。用这样的例题，可以锻炼读者的推理能力，引发对数学钻研的兴趣。

第四节　例题分析

题一、

1986年广东省举办推选十佳运动员奖，由18名运动员中推选10名，某君试图将这18名运动员编为每10名一组，问他要编多少组，才能不论是哪10名，都在他的编组之内？如果也要编中这10名运动员的名次，那又需要编多少组？

【分析】

要从18人中取10人为一组，可由：首先从9人中取1人为一组开始，其次从10人中取2人为一组，这样推到最后从18人中取10人为一组的数据来引证。显然，从9人中取1人为一组，就有9组，从10人中取2人为一组，可由1至9的连续数之和公式求得：

$$\frac{(9+1)9}{2}=45$$

其道理是，因10人中每人可编9次，例如：以每一数字代表一人，即由1字可组成12，【代表1和2二个人，以下同】13，14，15，16，17，18，19，1 $\boxed{10}$，共9组，但这9组同时是由2人组成的所以以总人数乘每人可编次数，再除以2，即$\frac{9\times10}{2}=45$；又如从11人中取3人为一组，每人可编45次，其计算方法是第一人以1代之，每次配2人【即3人为一组】，即有：123【三位数代表三个人，以下同】124，125，126，127，128，129，12 $\boxed{10}$，12 $\boxed{11}$，共9组，再轮，134，135，136，

137,138,139,13$\boxed{10}$,13$\boxed{11}$,共8组,如此计算下去,最后有1$\boxed{10}\boxed{11}$一组,即有:9+8+7+……+1=45。第二人以2代之,即有:234,【也是代表三个人,以下同】235,236,237,238,239,23$\boxed{10}$,23$\boxed{11}$,共8组,再轮:245,246,247,248,249,24$\boxed{10}$,24$\boxed{11}$,共7组,如此计算下去,最后有2$\boxed{10}\boxed{11}$一组,即8+7+6+……+1=36,加上在第一人中组成的125,126,……12$\boxed{11}$的9组,合共也等于45组,因这9组已在第一人轮组时计算;第三人以3代之,即有:345,346,347,348,349,34$\boxed{10}$,34$\boxed{11}$,共7组,再轮356,357,358,359,35$\boxed{10}$,35$\boxed{11}$,共6组,如此计算下去,最后有3$\boxed{10}\boxed{11}$一组,即7+6+5+……+1=28,加上第一人中组成的123,134,135,136,……13$\boxed{11}$共9组,又加上第二人中组成的234,235,236,……23$\boxed{11}$共8组,合共也等于45组,但这17组已分别在第一人和第二人轮组中计算,第四人,以4代之,……,第五人以5代之,…… 如此计算下去,最后有9 10 11【也代表三个人】一组,故有:$\frac{(1+9)9}{2}+\frac{(1+8)8}{2}+\frac{(1+7)7}{2}+\frac{(1+6)6}{2}+\frac{(1+5)5}{2}+\frac{(1+4)4}{2}+\frac{(1+3)3}{2}+\frac{(1+2)2}{2}+1=165$。又因为由11人中取3人为一组时,每人均编45次,但每组都由3人组成,故有$45\times11\div3=165$,也就是从

$\frac{9}{1}\times\frac{10}{2}\times\frac{11}{3}=165$式求出。

现在我们可以由以上讨论引证的数据推出求解公式。设被推选的运动员人数为x,取y(人)为一组,可以编成不雷同名字的组数为s(组),于是有以下公式:

$$s=\frac{(x-y)+1}{1}\times\frac{(x-y)+2}{2}\times\cdots\cdots\times\frac{x}{y}$$

按本题要求,代入上式得:

$$s = \frac{(18-10)+1}{1} = 9 \times \frac{10}{2} \times \frac{11}{3} \times \frac{12}{4} \times \frac{13}{5} \times \frac{14}{6} \times \frac{15}{7} \times \frac{16}{8} \times \frac{17}{9} \times \frac{18}{10}$$

整理得：$s = 11 \times 3 \times 13 \times 2 \times 17 \times 3 = 43758$ 组（次）。如果也要选中这 10 名运动员排列的名次，那就要再通过计算，也以一数字代表一人，并按以下推算：

如 2 名运动员为一组，轮流排列名次有 12，21 共 2 组，即 $1 \times 2 = 2$，3 名运动员为一组，轮流排列名次有：123，132，231，213，312，321 共 6 组，即 $1 \times 2 \times 3 = 6$，4 名运动员为一组，轮流排列名次有：

1234，1243，1324，1342，1423，1432，

2134，2143，2314，2413，2341，2431，

3124，3142，3214，3241，3412，3421，

4123，4132，4213，4231，4312，4321，

共 24 组，即 $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

如以上推算，得到 10 名运动员为一组，轮流排列名次，即有 $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 3628800$ 组次

因每组应编 3628800 次，而 43758 组就要再乘 3628800 得到 158789030400 组次。

答：某君要编 43758 组（次），才能不论是哪 10 名都在他的编组之内。如果也要编中这 10 名运动员的名次，则需要编 158789030400 组（次）。

题二、

当 $n > 1$ 时，试证明四个连续数之和等于 x^n 无整数解。

【分析】

设 a 为首项数，第 4 项为 $a+3$，由连续数之和公式，得到 4 个连续数之和等于 $2(2a+3)$，因此要证明下式无整数解：

$$2(2a+3) = x^n \text{（原式）} n > 1$$

证：假设原式有整数解，则等号右边 x 是偶数。

即：$2(2a+3) = (2k)^n$　k 是正整数

$2(2a+3) = 2^n k^n$

将上式等号二边除以 2 得：

$2a+3 = 2^{n-1}k^n$

因为 $n > 1$，得到 $n-1>0$，

所以上式等号右边等于偶数，这和等号左边（即 $2a+3$）等于奇数发生矛盾，故原式无整数解。

题三、

试证明三个连续数之积等于 x^3 时无整数解。

【分析】

设 3 个连续数为：a，$a+1$，$a+2$（$a \geqslant 1$，a 等于 0 无意义），依题意要证明下式：

$a(a+1)(a+2) = x^3$（原式）　①

无整数解。

证：因 $(a+1)^2 > a(a+2)$　②

得到：$(a+1)^3 > a(a+1)(a+2)$　③

又因 $a^3 < a(a+1)(a+2)$　④

将原式代入 ③ 式得：

$(a+1)^3 > x^3$　⑤

将原式代入 ④ 式得：

$x^3 > a^3$　⑥

由 ⑤、⑥ 式可得：$(a+1)^3 > x^3 > a^3$　⑦

由 ⑦→$(a+1) > x > a$　⑧

⑧ 式中，因为 a 是整数，易知 x 不是整数，

从而原式无整数解得证。

题四：

求下列各式的解，其中除（1）题外，其余 $a \neq b \neq c \neq d$

(1) $\begin{array}{r} a\,b \\ \times\ \ k \\ \hline b\,a \end{array}$，　　(2) $\begin{array}{r} a\,b\,c\,d \\ \times\qquad k \\ \hline d\,c\,b\,a \end{array}$，　　(3) $\begin{array}{r} a\,b\,c\,d\,e \\ \times\qquad\ \ k \\ \hline e\,d\,c\,b\,a \end{array}$

(1)　解 $\begin{array}{r} a\,b \\ \times\ \ k \\ \hline b\,a \end{array}$(原式)

将原式变形为:【即按题意】

$(10a+b)k=10b+a$

即 $10ka+kb=10b+a$

移项整理得:$a(10k-1)=b(10-k)$　　　　(b)

由(b)式容易得到一组解为:

$k=1$，$a=b$—任意整数。【按题要求只限等于一位数】在(b)式中,如 $k>1$ 时,b 必等于一个 2 位数以上的数,试演如下:

以 $k=2$ 代入(b)式得到 $19a=8b$,由于 $(19,8)=1$,

得到 $a=8$，$b=19$。

以 $k=3$ 代入(b)式得到 $29a=7b$,由于 $(29,7)=1$,

得到 $a=7$，$b=29$。

以 $k=4$ 代入(b)式得到 $13a=2b$,由于 $(13,2)=1$,

得到 $a=2$，$b=13$。

以 $k=5$ 代入(b)式得到 $49a=5b$,由于 $(49,5)=1$,

得到 $a=5$，$b=49$。

以 $k=6$ 代入(b)式得到 $59a=4b$,由于 $(59,4)=1$,

得到 $a=4$，$b=59$。

以 $k=7$ 代入(b)式得到 $69a=3b$,约简得:

$23a=b$,由于 $(23,1)=1$,得到 $a=1$，$b=23$。

以 $k=8$ 代入(b)式得到 $79a=2b$,由于 $(79,2)=1$,

得到 $a=2$，$b=79$。

以 $k=9$ 代入(b)式得到 $89a=b$,由于 $(89,1)=1$,

得到 $a=1$，$b=89$。

按题要求a、b、k都是一位数，故原式唯一解：$k=1$，而$a=b$且是任意一位数字的正整数。

如果将(b)式变形为$\frac{b}{a}=\frac{10k-1}{10-k}$，然后引用第一章第五节(二)的引理，也可得到相同的结果，请读者自己演算。

(2) 解

$$\begin{array}{r} a\,b\,c\,d \\ \times \quad\; k \\ \hline d\,c\,b\,a \end{array} \text{(原式)}$$

上式可用筛法的讨论求解。

先证明原式中的$k<5$。

如果取$k>5$，则因原式的积的位数仍等于被乘数的位数，得知a的唯一取值等于1，取$a=1$，则由于$d\times k$的积的尾位数字等于1，得到$k=9$，$d=9$或$k=7$，$d=3$；取$k=9$，$d=9$代入原式得：

$$\begin{array}{r} 1\,b\,c\,9 \\ \times \quad\; 9 \\ \hline 9\,c\,b\,1 \end{array}$$

由上式得知$b<2$，如果$b\geqslant 2$，则因$b\times k$得到二位数要进位而不符合d等于9。如取$b=1$，则要有$c\times 9+8$【8是$9\times 9=81$的首位数】得到的总和的尾位数等于1，按这要求，只有c等于7，但以$c=7$，$k=9$，$d=9$，$b=1$代入上式验证不符；如果取$k=7$，$d=3$，又因1×7【即$a\times k$】不等于3【即d】。如果取$k=5$，则a的唯一值也是1，但$d\times 5$【即$d\times k$】得到的尾位数字不是1。由以上讨论得知$k<5$。

由例1的引理，不取k等于1。

如果取$k=2$，得到$a<5$且a是偶数，因为如果a是奇数，则和$d\times 2$【即k】等于偶数发生矛盾。如取$a=4$，由$d\times k$，则因$d\times 2=4$得到d等于2，这和$d>a$发生矛盾。如取$a=2$，由$d\times k=a$有$d\times 2=2$得到$d=1$，也和$d>a$发生矛盾。故不能$k=2$。

如果取$k=3$，得到$a<4$，如取$a=3$，为了符合$d\times k$得到的

尾位数字是3，则d有唯一值，即$d=1$，这和$d>a$发生矛盾。如取$a=2$，为了符合$d\times k$的尾位数字等于2，则d有唯一值，$d=4$，但因2×3【即$a\times k$】等于6而不是4；如取$a=1$，为了符合$d\times k$的尾位数等于1，则d有唯一值，即$d=7$，但因1×3【即$a\times k$】等于3而不是7。（如果$3+4=7$，指进位数，但因3乘一位数【即使是最大数】其积的十位【即第一位】数字小于4）。

由以上的讨论得知k的唯一值是$k=4$。【如果k不等于4，则原式不能成立】

取$k=4$，则得到a等于1或2。如取$a=1$，因k是偶数乘d等于偶数而和a等于1是奇数发生矛盾；取$a=2$，由$d\times k=a$得到d等于8或3，如d等于3，但因2×4【即$a\times k$】等8而不等于3，故d的唯一值是8，以$k=4$，$a=2$，$d=8$代入原式得：

$$\begin{array}{r} 2bc8 \\ \times\quad 4 \\ 8cb2 \end{array}$$

显然，这时b的取值不能大于3，只能在$b\geqslant 2$中选取，如取$b=2$，则由于$4\times c+3=\square 2\Rightarrow 4\times c=\square 9$，这是不可能的，因为等号两边一偶一奇发生矛盾，故只能取$b=1$，

即：
$$\begin{array}{r} 21c8 \\ \times\quad 4 \\ \hline 8c12 \end{array}$$

由上式可得方程：

$(2108+10c)4=8012+100c$

解方程得：$c=7$

故原式中：

$a=2$，$b=1$，$c=7$，$d=8$，$k=4$，

即：
$$\begin{array}{r} 2178 \\ \times\quad 4 \\ 8712 \end{array}$$。

(3)　解：$\begin{array}{r} abcde \\ \times \quad k \\ \hline edcba \end{array}$（原式）

上式也可用筛法求解（略）

这里有一奇怪的巧合，在求得例(2)以后，可以利用例(2)用一简单的演解法可得到上式的解。即：

将 $\begin{array}{r} abcde \\ \times \quad k \\ \hline edcba \end{array}$ 变成 $\begin{array}{r} 21\boxed{c}78 \\ \times \quad\quad 4 \\ \hline 87\boxed{c}12 \end{array}$

于是有，

$$(21078 + 100c)4 = 87012 + 100c$$

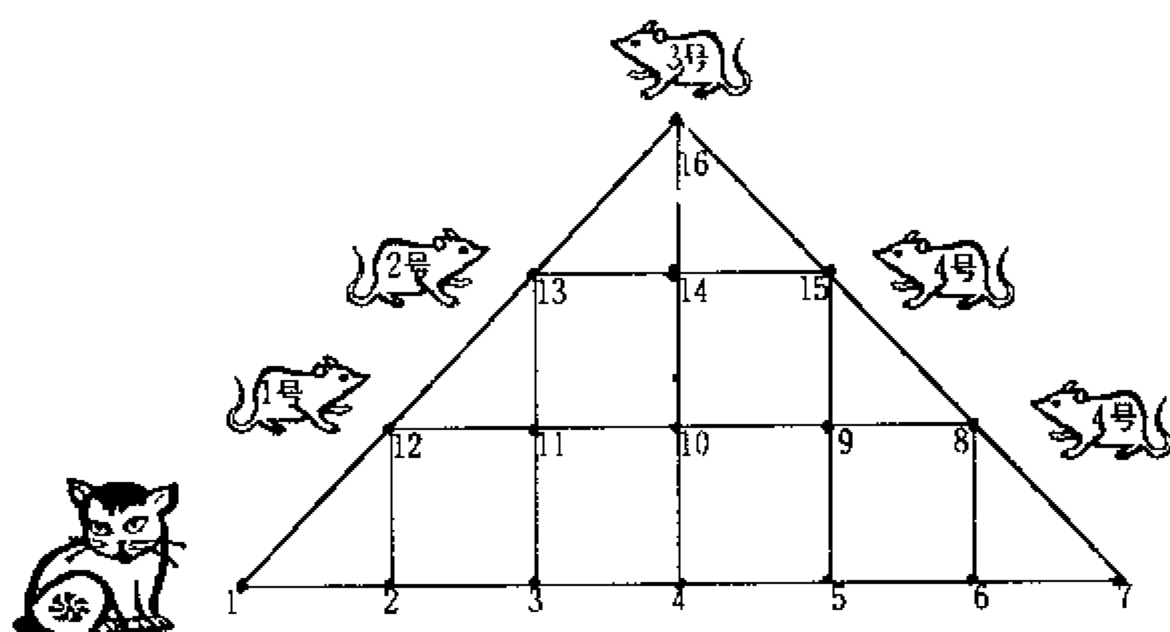
解得 $c = 9$，

故例三的解是 $\begin{array}{r} 21978 \\ \times \quad 4 \\ \hline 87912 \end{array}$

习题

1. 金字塔图斜线点外都有一只老鼠，【老鼠名由左到右，叫一号、二号、三号、四号、五号】老鼠的行动各自沿垂直线的点位来回跑，花猫则沿着数字的顺序和逆序来回跑，它们跑的速度如表，它们同在夜间零时从图外点开始行动，入点位后再不出线外，请计算出猫抓住老鼠的时间和点位。（已知猫和老鼠从图外点到图边上的点所需要的时间也和图内每到达一点所需要的时间相等。）

分钟	猫	老鼠				
		1号	2号	3号	4号	5号
每到达一点位所需要的时间（以分钟为计算单位）	1	3	5	4	5	7

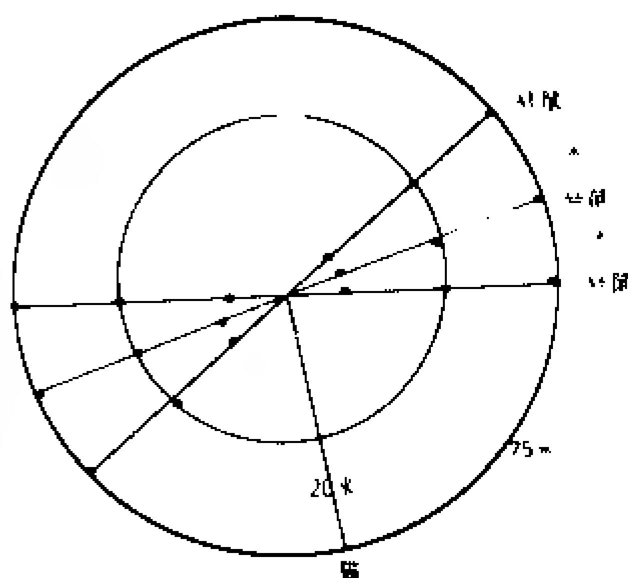


图题1

注：猫的行程中，从下层进到上层时【或上层回到下层】的距离比横线上二点的距离本来是稍长一些，但这里只做相等处理，不然的话，此题的解答就更复杂了，特此注明。

2. 一只猫和三只老鼠，分别在一直径长100米的圆周上，猫和一号老鼠的距离是75米，老鼠之间的距离是20米，【均指弧长】，老鼠在直径上来回奔跑，猫只限在圆周上跑，它们跑的速度如表。猫为了省少路程，先向圆心走20米，然后停下来，老鼠的起点是在原来大圆周的点上，它们一齐从夜间零时开始活动，猫沿着新选择的圆周向一号老鼠的方向追赶，试算出猫抓住老鼠的时间和地点。

分钟	猫	老鼠 1号	老鼠 2号	老鼠 3号
每跑20米所需要的时间（以分钟为单位）	20分钟	3分钟	5分钟	7分钟



图题2

3. 瓶中有12两酒，旁边有大、中、小三个杯，大杯容量7两，中杯容量5两，小杯容量3两，由三人均分，问怎样分？

4. 卖油郎的桶里只存12两油，且只有一个量油器，容量是3两，小刘拿来一个碗，容量是5两，但小刘的钱只够买4两油，问卖油郎怎么办？

5. 有一种不求人小动物，出生满10天就能生育，每天生育一次，每次生3只，假如这只小动物，今天就开始生育，问从明天起再过30天，总数共有多少？

6. 某单位举行象棋单人赛，采用循环制，规定每人对赛一局，总共赛了105局，问参加比赛的有多少人？

第二部　习题解答

第十四章

1. 根据第一节的讨论，9个数字中，4数大于E，4数小于E。【E是中心格数字】因此，以7为中心格数字时，凑成的连续数是3，4，5，6，7，8，9，10，11，可按第一节中的图$A2$填成以下A图。又因为大小二数之和等于$2E$，所以最大数的最大值只能是$2E-1$，即$2\times8-1=15$，但取最大数为15时，有三个不同数组，即：①1，2，3，7，8，9，13，14，15；②1，3，5，6，8，10，11，13，15；③1，4，5，7，8，9，11，12，15；按第一节填图方法填成三个B图【即$B1$、$B2$、$B3$】。又因为最小数的最大值是$E-4$，得到$9-4=5$，也按第一节的填法填成以下C图：

4	11	6
9	7	5
8	3	10

A

7	15	2
3	8	13
14	1	9

$B1$

6	15	3
5	8	11
13	1	10

$B2$

5	15	4
7	8	9
12	1	11

$B3$

8	13	6
7	9	11
12	5	10

C

2. 根据第一节的讨论得知，大小二数之和等于$2E$，按题意$2E=80$，得到$E=40$，又按⑦式$y_3=3E$，得到9数之和为$S_9=3y_3=360$，应用9项等差数列公式$S_9=\frac{(2a_1+8d)9}{2}$，代入得：

$360=\frac{(2a_1+8d)9}{2}$简为$40=a_1+4d$【a_1是最小数，d是公差】移项得：$a_1=40-4d$，d取值为1至9【因a_1是零以外正整数】取a_1的最小值时，应取d值为9，故得到$a_1=40-4\times9=4$得到9个数字为4，13，22，31，40，49，58，67，76，按第一节中图$A2$比照可填成图解1，图解2。

$E - d$	$E + 4d$	$E - 3d$
$E - 2d$	E	$E + 2d$
$E + 3d$	$E - 4d$	$E + d$

图解 1

31	76	13
22	4	58
67	4	49

图解 2

3. 按第一节讨论得知，9 格方形图 9 数之和等于中心格数字的 9 倍，故有 $E = 135 \div 9 = 15$，利用等差数列公式：

$$135 = \frac{(2a_1 + 8d)9}{2}$$

简为 $15 = a_1 + 4d$

解得 $d = 1,2,3$；$a_1 = 11,7,3$，

9 个数字可得 3 组：①11，12，13，14，15，16，17，18，19；②7，9，11，13，15，17，19，21，23；③3，6，9，12，15，18，21，24，27。

按第一节图 $A2$ 比照填成图解 3、图解 4，图解 5。

14	19	21
13	15	17
18	11	16

图解 3

13	23	9
11	15	19
21	7	17

图解 4

12	27	6
9	15	21
24	3	18

图解 5

4. 按第一节讨论得知，9 格方形图中最大数的最大值等于 $2E - 1$，依题意即 $2 \times 9 - 1 = 17$，因 $E = 9$，故 $17 = E + 8$。

因每行三数之和等于 $3E$，即 27，将最大数填在上横行中间格，即得到左右二角格之和为 10。【即 $27 - 17 = 10$】将 10 分解为：$10 = 1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6 = 5 + 5$，其中 $1 + 9$ 中的 1 已填在下横行中间格，已重复，故应舍去这条，又因 $5 + 5$ 中之 5 相重，故也应舍去这条，因此，以 17 为最大数可组成三组，按第一节填写方法，即如下 3 组：图解 6，图解 7、图解 8。

$E-7$	$E+8$	$E-1$
$E+6$	E	$E-6$
$E+1$	$E-8$	$E+7$

图解 6

$E-6$	$E+8$	$E-2$
$E+4$	E	$E-4$
$E+2$	$E-8$	$E+6$

图解 7

$E-5$	$E+8$	$E-3$
$E+2$	E	$E-2$
$E+3$	$E-8$	$E+5$

图解 8

再比对可填成如下三图即图解 9、图解 10，图解 11。

2	17	8
15	9	3
10	1	16

图解 9

3	17	7
13	9	5
11	1	15

图解 10

4	17	6
11	9	7
12	1	14

图解 11

5. 按第一、二节的讨论得知，图中数字大小二数之和也就是以 E 为中心横、直、斜行相对的二数之和，同时也等于 $2E$，依题意 $60 = 2E$，得到 $E = 30$，利用等差数列公式：

$$30 \times 25 = \frac{(2a_1 + 24d)25}{2}$$

简为 $30 = a_1 + 12d$

得到二组解：① $\begin{cases} a_1 = 6 \\ d = 2 \end{cases}$ ② $\begin{cases} a_1 = 18 \\ d = 1 \end{cases}$

取公差最大值即 $d = 2$，得到 25 数是：6、8、10、12、14，……………54，按第一节图 $A2$ 和第二节图 $A7$，比照填成图解 12。

54	20	12	14	50
52	32	34	24	8
16	22	30	38	44
18	36	26	28	42
10	40	48	46	6

图解 12

6. 根据第二节第⑨式 $E > \frac{m^2+1}{2}$，依题意得到：

$24 > \frac{m^2 - 1}{2}$，解得 $7 > m$，即 m 的取值为1至6，其中奇数有3，5，因此，取中心格数字为24时，奇数小方格的方形图只有9小格和25小格二种，如都取连续数，可填成图解13、图解14。

25	26	21
20	24	28
27	22	23

图解 13

36	19	15	16	34
35	25	26	21	13
17	20	24	28	31
18	27	22	23	30
14	29	33	32	12

图解 14

7. 根据第四节讨论，得知16格方形图中心四格的数字之和等于一行四数之和，因此周围数字之和应等于三行12数字之和，故可得16数字之和为 $114 \times \frac{4}{3} = 152$，利用等差数列公式得：

$$152 = \frac{(2a_1 + 15d)16}{2}$$

简为：$19 = 2a_1 + 15d$

正整数解为：$a_1 = 2, d = 1$，即16数字为2至17的连续数，按第四节图 $A16$，以 $a = 2, b = 9, c = 12, d = 15$，比照填成图解15。

8	17	10	3
11	2	9	16
5	12	15	6
14	7	4	13

图解 15

8. 分析：因500不为9整除，所以不符合填9小方格的方形图；由于 $500 = 25E$，故 $E = 20$，又因 $20 > \frac{5^2 - 1}{2}$，得到符合填以中心

格数字为 20 的 25 格方形图，利用等差数列公式代入得：

$$500=\frac{(2a_1+24d)25}{2}$$

简为：$20=a_1+12d$。

解得：$a_1=8$，$d=1$

即这 25 数可由 8，9，10，…………32；按第二节图 A2 和第二节图 A7 比对可填成图解 16，也可按第一节末段方法填成图解 17。

右图：

32	15	11	12	30
31	21	22	17	9
13	16	20	24	27
14	23	18	19	26
10	25	29	28	8

图解 16

2	35	33	27	3
10	21	16	23	30
26	22	20	18	14
25	17	24	19	15
37	5	7	13	38

图解 17

又根据第四节的讨论，16 小方格方形图每行四数之和 $\geqslant 34$，由于 $500\div4=125$，而 $125>34$，故必符合填 16 小方格的方形图，按这一节讨论的方法，利用公式代入得到：$500=\frac{(2a_1+15)16}{2}$

简为：$500=16a_1+120$

解之得不完全商 23，余数为 12，就是说，这 16 数如取 23，24，………38，则余数为 12，因此，可取 23 至 34 与 38 至 41 的连续数【也可取 23 至 26 与 28 至 39 的连续数】然后按图 A16，取 23 至 34 的连续数为 a、b、c 各行的 4 数，取 38 至 41 为 d 行的四数，并计算得：

$a=23$，　$a+1=24$，　$a+2=25$，　$a+3=26$，

$b=30$，　$b-1=29$，　$b-2=28$，　$b-3=27$，

$c=33$，　$c+1=34$，　$c-1=32$，　$c-2=31$，

$d=39$，　$d-1=38$，　$d+1=40$，　$d+2=41$。

然后比照图 A16 填成图解 18。

29	41	31	24
32	23	30	40
26	33	39	27
38	28	25	34

图解 18

此外，因 500 不为大于 5 的奇数平方数所整除，也不为大于 4 小于 10 的偶数所整除，虽然为 10 所整除，但因 1 至 100 的连续数之和为 5050，已大于 500，故方形图中数字之和等于 500 时，只有 25 格和 16 格的方形图，才符合要求，可以填数。

9. 设 E 为 25 格方形图的中心数字，y_4 为 16 格方形图每行四数之和，依题意可得：

$$2 \times 4y_4 = 3 \times 25E，即：8y_4 = 75E，$$

从上式看，由于：$(8,75)=1$，【即二数互质】故只有 y 为 75 所整除时或 E 为 8 所整除时，上式才有整数解；又因为 $y \geqslant 75$ 时，有 $E \geqslant 8$ 时，根据第二节讨论，得到 E 的取值，第 ⑨ 式：$E > \frac{m^2-1}{2}$【m 是奇数方形图每行的小方格数】代入得 $E > \frac{5^2-1}{2}$，即 $E > 12$，由于 $y_4 = \frac{75E}{8}$，故应取 E 为 8 所整除，因此，可令：$E = 8k$，代入上式得到 $y_4 = 75k$，这时 k 为大于 1 的整数。故取 k 等于 2 时，是上式 E 所取的最小值，即 $E = 16$，从而得到 $y_4 = 150$

利用 25 个连续数和 16 个连续数的公式，求出各数字：

A、 $16 \times 25 = \frac{(2a_1 + 24)25}{2}$，

解得 $a_1 = 4$，即 25 个连续数是由 4 至 28。

B、 $4 \times 150 = \frac{(2a_1 + 15)16}{2}$，

解得 $a_1 = 30$，即 16 个连续数是由 30 至 45。

按第二节和第四节的方法，比对有关图，可分别填成以下图解

19 和图解 20。

28	11	7	8	26
27	17	18	13	5
9	12	16	20	23
10	19	14	15	22
6	21	25	24	4

图解 19

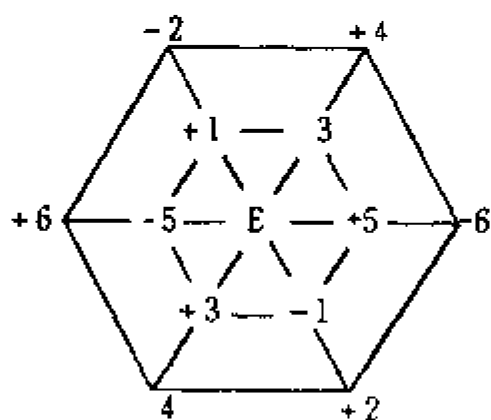
36	45	38	31
39	30	37	44
33	40	43	34
42	35	32	41

图解 20

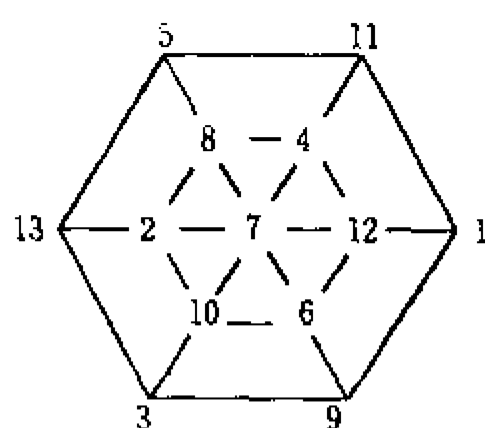
10. 仿第一节的方法，使六边形图的顶角数字之和等于 6 个 E，又使三行对角线，每行五数之和、六个大三角形每个三角形的周围【即边上】五个交点数字之和等于 5 个 E，因此，先将图中每个交点写上 E、并做 $E \pm t$，t 是待确定的自然数，即 $t = 1,2,3\cdots\cdots$

仿第一节方法，经计算后得到以下图解 21、图解 22。

【注：图中只写有正负符号的数字，实则在正负符号前加上 E，如 $+1$，即 $E+1$，如 -3，即 $E-3$，以后均同此。】其中 $E>6$，如取 $E=7$，可填成图解 22，六个顶角数字之和等于 42，每行数字之和与大三角五数之和等于 35。



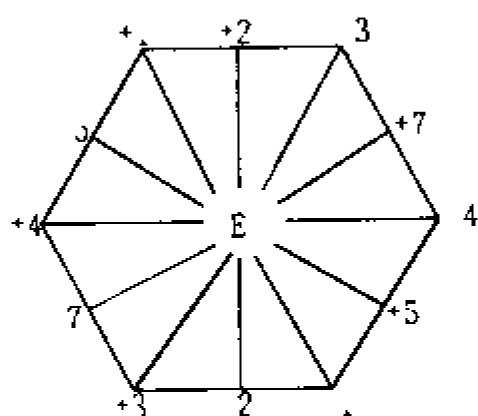
图解21



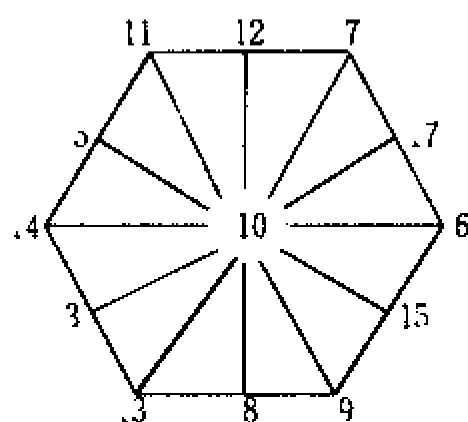
图解22

11. 按照第一节，使六边形图每行三数之和等于 3 个 E，经计算后得到图解 23，其中 $E>7$，如取 $E=10$，可填成图解 24，每行数

字之和等于 30。

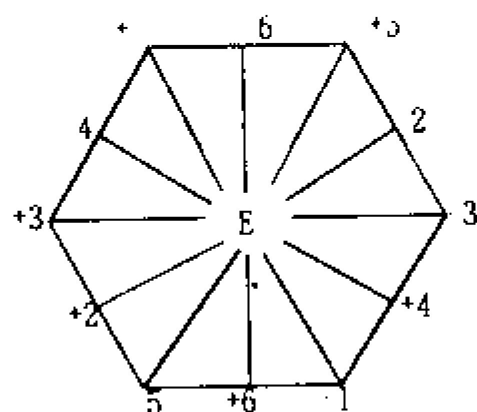


图解23

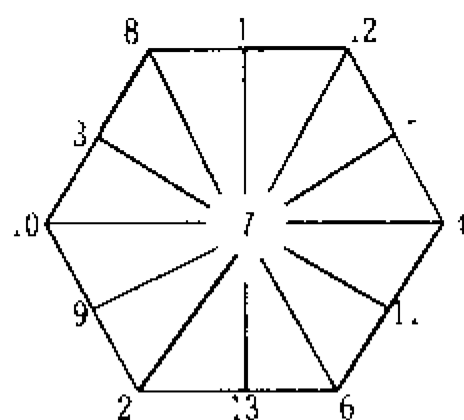


图解24

如果要求用 13 个连续数填图，就要选 t 中的奇数填在顶角点，选 t 中的偶数填在边行的中点，用抵销方法计算，可得到图解 25。其中 $E > 6$，如取 $E - 7$ 则这 13 数是由 1 至 13 的连续数，可填成图解 26。每行数字之和等于 21。

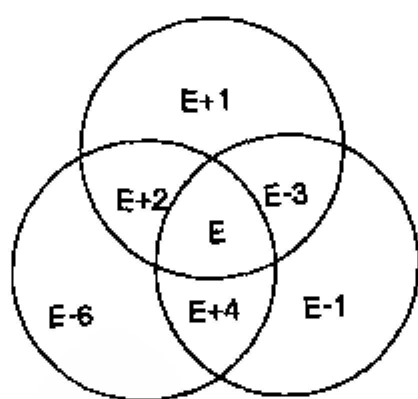


图解25

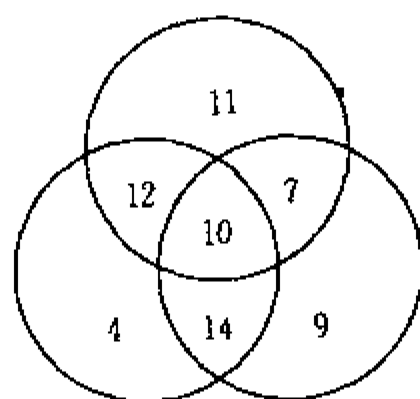


图解26

12. 按第一节，使每个圆圈内四数之和等于 4 个 E，并仿其法，可得图解 27，其中 $E > 6$，如取 E 10 可填成图解 28，每个圈内 4 数之和等于 40。

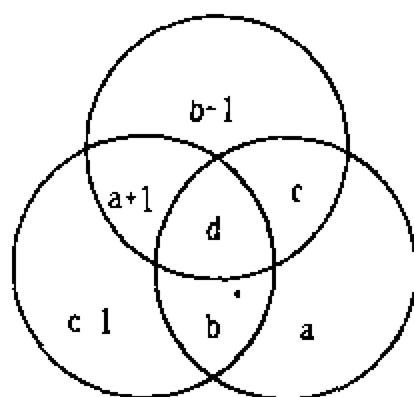


图解27



图解28

如果要求用七个连续数填写，则按第四节的方法，使每个圆圈内四数之和等于 a、b、c、d 四数之和。先将每个圈内都写有 a、b、c、d 四数，如图解 29，然后在图的上一个圈写 $b-1$ 和 $a+1$，接着在左圈写 $c-1$。



图解29

在图解 29 中可令：$a=1$，$a+1=2$，

$b-1=3$，$b=4$，

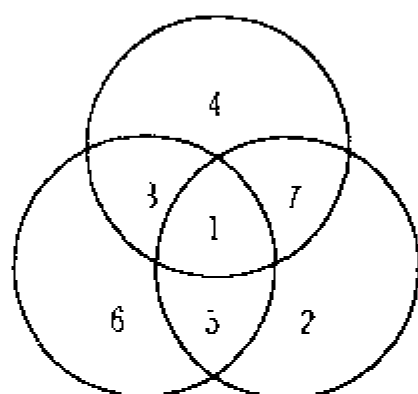
$c-1=5$，$c=6$，

$d=7$。

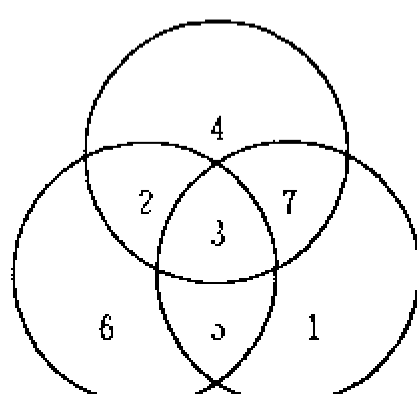
于是可填成图解 33。

如果要求用 1 至 7 的连续数填这个三圈图，且每个圆圈内四数之和是最小值，则将三圈共有【即任一圆圈内都有这个数字】的

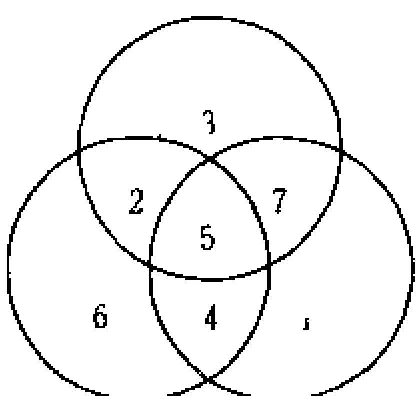
中心数d,取为这七数中的最小数,如分别取$d = 1$,$d = 3$,$d = 5$,【这时d不能取为偶数,因为a和$a+1$,$b+1$和b,$c+1$和c,都是二二互相连续的,如果取d为偶数,必造成一对不能连续】可填成图解30、图解31、图解32。图解30每圈4数之和等15,图解31每圈4数之和等16



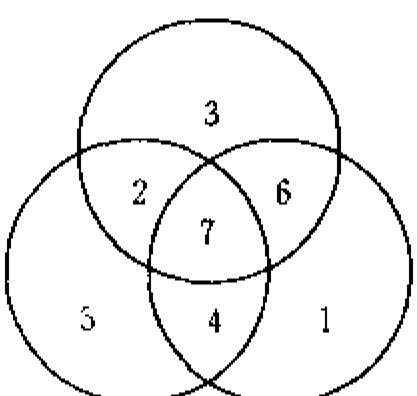
图解30



图解31



图解32



图解33

图解32每圈4数之和等17,图解33每圈4数之和等18。

凡是取每圈4数之和大于18时,都可以上面四个图为依据,进行推算后填写。例如取每圈4数之和等于78时,可推算如下:

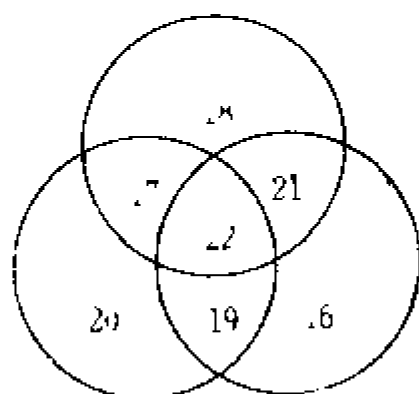
因$(78 - 15) = 63$ 不为4所整除

$(78 - 16) = 62$ 不为4所整除

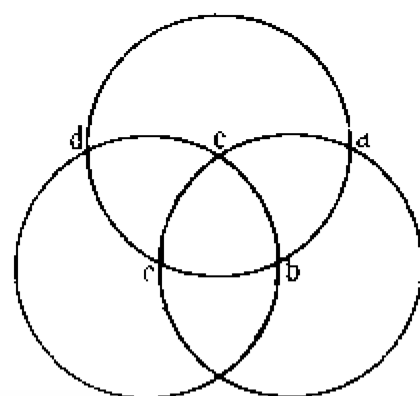
$(78-17)\div 3=61$ 不为4所整除

$(78-18)=60$ 除以4得商为15

故可以图解33为依据，把图中七个数字，每个再加15，便可得到图解34。每圈4数之和等于78。



图解34



图解35

如果将上图改为按交叉点填数(图解35)

先判别一下，能否在每圈的交点上填上a、b、c、d、e五数。从图解35的右圈看，它还差"d"没有填上【即图的最低点】，如填上"d"，这就和左圈上已有的"d"相重复，故知不能做每圈都有a、b、c、d、e五数。

另外，由于中间三数是二圈共有数，所以每圈除了二个共有数外，其余二数，是从外围三数中取其二，这就得到这外围三数必须是二二之和都相等，但这是不可能的，因为：

假设外围这三数是m、n、S，即

$$m+n=n+S=m+S$$

解之得到：$m=n=S$

这和要求数字不同发生矛盾，故这图如按交叉点是不能填数的。

13. 因为要求取六个不同的数字，并且是较小的数字填入下面的三圈图，则这六个数字是由1至6的连续数。又因为图中有三个数字，每个都为二个圆圈所共有，那么，将这六数之和再加上为

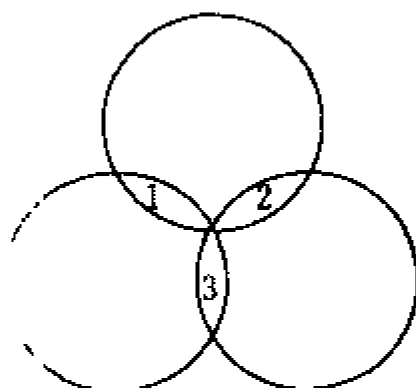
三个圆圈所共有的三数之和，合计起来，必能为 3 平分【也就是每圈三数之和】，因为 3 个等差数之和，必为 3 所整除，故题的要求可解，现演算如下：

$$\frac{(1+6)\times 6+(1+3)\times 3}{2}=27$$

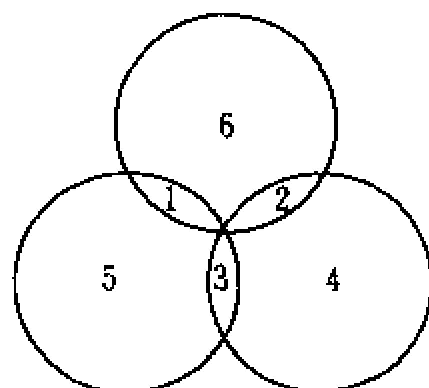
【上式是用连续数公式计算 1 至 6 与 1 至 3 二个连续数列之和。】

因 27 ÷ 3 = 9 得到每圈三数之和等于 9，

将 1、2、3 这三个最小数分别作为二圆圈共有之数，如图解 36：剩下的 4、5、6 三数，因 9 − (1 + 2) = 6，9 − (1 + 3) = 5，9 − (2 + 3) = 4，故可填得图解 37，每圈内三数之和等于 9。

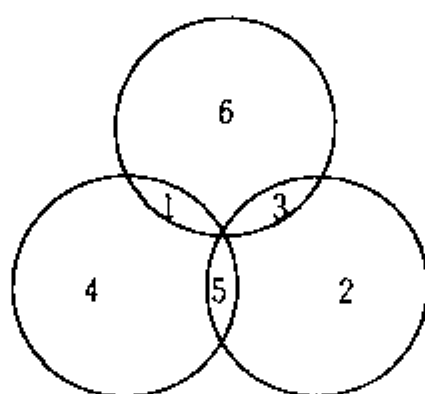


图解36

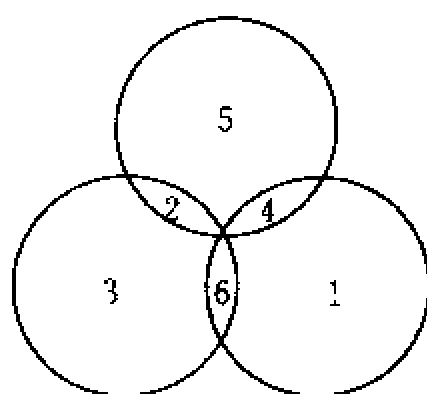


图解37

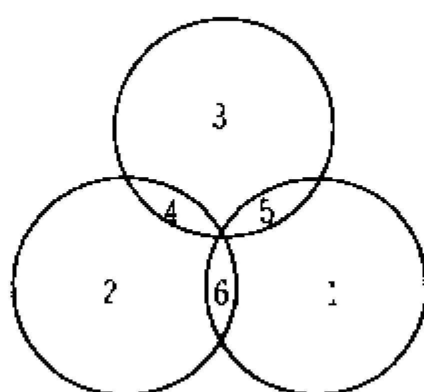
将 1 至 6 的连续数填图，可以得到四种结果，则每圈数字之和分别为 9、10、11、12。填法是，只要将六个数字分成二组，每组都是等差数列并轮换作为二圈的共有数；这些共有数之和越小，则每圈数字之和也越小。分别填成图解 38，图解 39，图解 40。图解 38 每圈三数之和为 10，图解 39 每圈三数之和为 11，图解 40 每圈三数之和为 12。



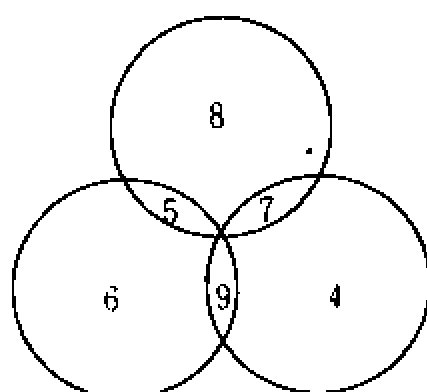
图解38



图解39



图解40



图解41

如果要求每圈三数之和大于12,且这六数必须是连续数【如果不是连续数,那就更容易了】则可将上面四图【图解37、图解38、图解39、图解40】为依据,进行推算,例如求每圈之和为20,则:

因(20－9)＝11,不为3所整除,

(20－10)＝10,不为3所整除,

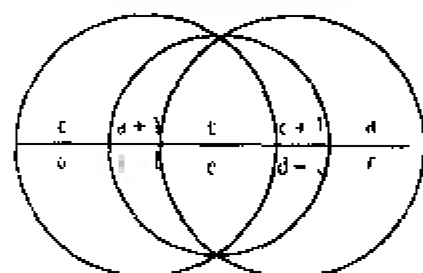
(20－11)＝9,除以3得商为3,

(20－12)＝8,不为3所整除。

故可以图解39为依据,把图中六个数字,每数加3,便可得到图解41,每圈三数之和等于20。

14. 先作每个圆圈内都有 a、b、c、d、e、f 六个代数,再用加减符号带上数字,使每圈六数之和仍等于 a、b、c、d、e、f 六数之和,并使

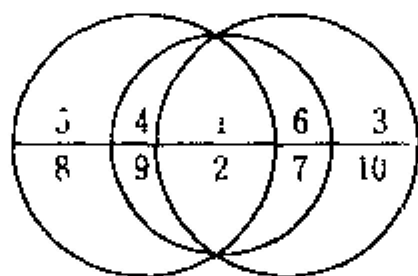
加上符号的代数能与本身不加符号的代数成为两个连续数，如图解 42，例如取 $a+1$ 后，另一个 a 就不再带加减符号，如果要加则取 $a+2$，这样 $a+1$ 和 a，或 $a+1$ 和 $a+2$ 都能成为两个连续数。


图解42

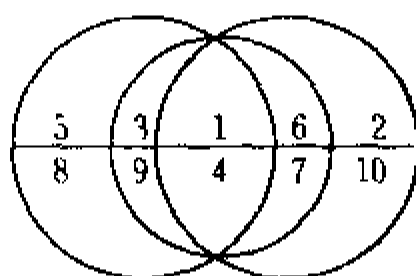
并写上：a、$a+1$
b、
c、$c+1$
d 1、d、
e、
f 、f

图中横线上下相对的数可交换

以上除 b、e 外，其余八数，每二数都可成连续数。因此，b 和 e 可以取为连续数，也可以一奇一偶，但要偶大于奇，即 b、e 可分别取为1、2，1、4，1、6，……1、10，或3、4，3、6，…，3、10，或5、6，…，5、10，或7、8，7、10，9、10，其余八数，则取除 b、e 已代替的二数外的数。因 b 和 e 是三圈共有数，故只要取 b、e 最小值，则可得到每圈六数之和的最小值。如取 $b=1$，$e=2$，则 $a=3$，$a+1=4$，$c=5$，$c+1=6$，$d-1=7$，$d=8$，$f-1=9$，$f=10$，依图解 42 填写可得图解 43，每圈六数之和等于 29。



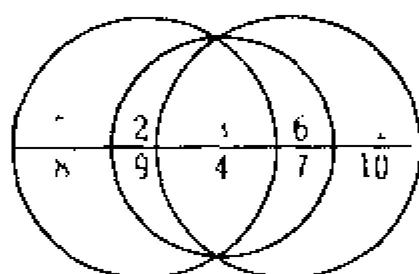
图解43



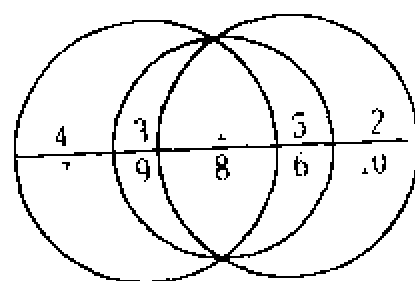
图解44

如取 $b=1$，$e=4$，$a=2$，$a+1=3$，$c=5$，$c+1=6$，

$d-1=7$，$d=8$，$f-1=9$，$f=10$，依图解 42 填成图解 44，每圈六数之和等于 30。

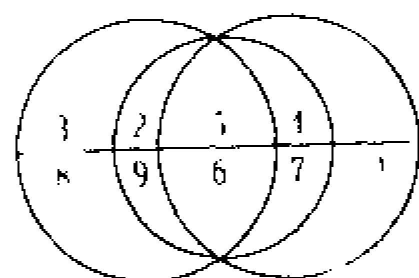


图解45

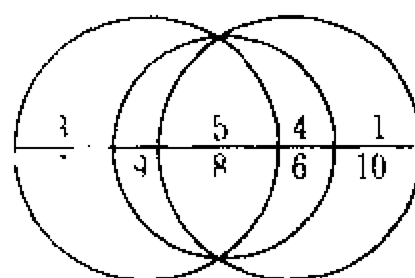


图解46

如取 $b=3$，$e=4$，$a=1$，$a+1=2$，$c=5$，$c+1=6$，$d-1=7$，$d=8$，$f-1=9$，$f=10$，依图解 42 可填成图解 45，每圈六数之和等于 31。

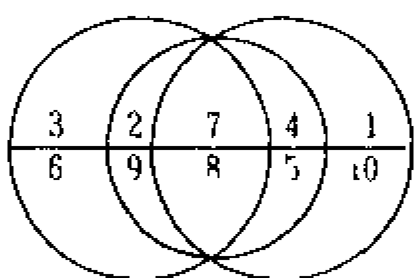


图解47

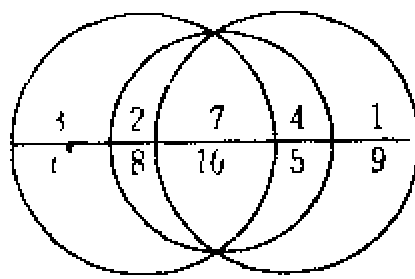


图解48

如取 $b=1$，$e=8$，$a=2$，$a+1=3$，$c=4$，$c+1=5$，$d-1=6$，$d=7$，$f-1=9$，$f=10$，依图解 42 可填成图解 46，每圈六数之和等于 32。

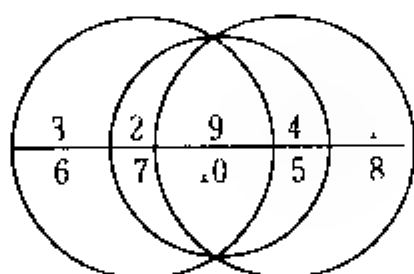


图解49

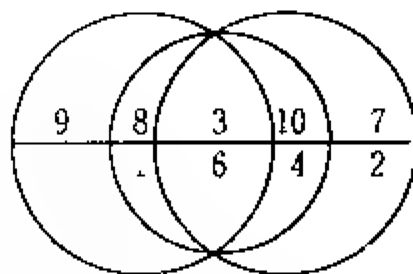


图解50

如取 $b=5$，$e=6$，$a=1$，$a+1=2$，$c=3$，$c+1=4$，$d-1=7$，$d=8$，$f-1=9$，$f=10$，依图解 42 可填成图解 47，每圈六数之和等于 33。



图解51



图解52

如取 $b=5$，$e=8$，$a=1$，$a+1=2$，$c=3$，$c+1=4$，$d-1=6$，$d=7$，$f-1=9$，$f=10$，依图解 42 可填成图解 48，每圈六数之和等于 34。

如取 $b=7$，$e=8$，$a=1$，$a+1=2$，$c=3$，$c+1=4$，$d-1=5$，$d=6$，$f-1=9$，$f=10$，依图解 42 可填成图解 49，每圈六数之和等于 35。

如取 $b=7$，$e=10$，$a=1$，$a+1=2$，$c=3$，$c+1=4$，$d-1=5$，$d=6$，$f-1=8$，$f=9$，依图解 42 可填成图解 50，每圈六数之和等于 36。

如取 $b=9$，$e=10$，$a=1$，$a+1=2$，$c=3$，$c+1=4$，

$d-1=5$，$d=6$，$f-1=7$，$f=8$，依图解 42 可填成图解 51，每圈六数之和等于 37。

在 1 至 10 的数字中，凡三圈共有的 b、e 二数之和相等者，其每圈六数之和也相等，如以 $b=1$，$e=8$ 和以 $b=3$，$e=6$ 填成的图，每圈六数之和，都等于 32。

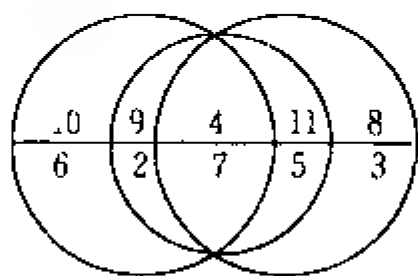
如取 $b=3$，$e=6$，随便再选 $f=1=1$，$f=2$，

$d=1=4$，$d=5$，$a=7$，$a+1=8$，$c=9$，$c+1=10$，依图解 42 可填成图解 52，每圈六数之和等于 32。

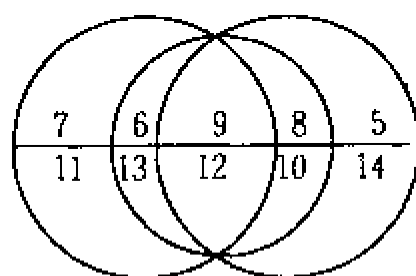
因此，以 1 至 10 的连续数填此种三圈图时，每圈内六数之和最小值是 29，最大值是 37。如果取每圈六数之和大于 37 时【10 个数字仍然是连续数】，可将以上九个图【从图解 43 至图解 51】为依据，进行推算。例如取每圈六数之和等于 38 时，因为每圈有六个数字，故有：

$38 - 6 = 32$

可依据每圈等于 32 的图，将图中每一数字都加 1 就可以了。如图解 53，每圈六数之和等于 38。



图解53



图解54

现在要求用 10 个连续数填此种三圈图，并使每圈六数之和等于 58，

因 $58 - 29 = 29$　不为 6 所整除

$58 - 30 = 28$　不为 6 所整除

$58 - 31 = 27$　不为 6 所整除

58 − 32 · 26 不为 6 所整除

58 33 − 25 不为 6 所整除

58 34 24 除以 6 得商为 4

故可依据以上每圈六数之和等于 34 的图【即图解 48】每个数字加 4，可填成图解 54，每圈六数之和等于 58。

再要求用 10 个数字之和等于 70 填图。先计算一下，看这 70 是否等于 10 个连续数之和。可利用连续数公式试算：

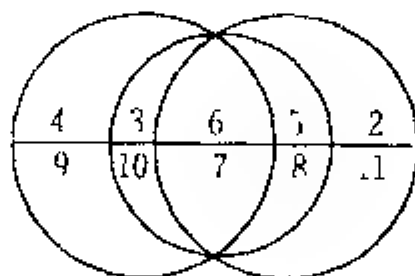
$70 \quad (2a \quad - 9) \times \frac{10}{2}$，其中 a 是 10 个连续数的首项，即 70

$10a + 45$ 此式无整数解，故知 70 不等于 10 个连续数之和。

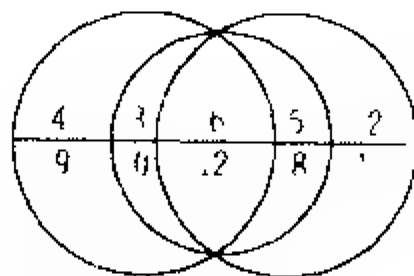
但因 $\left[\frac{70 \quad 45}{10}\right]$ 整数部分为 2，余数 5，

又因 10 5 5，

由此得知，70 是由 2 至 11 的连续数之和再加 5，故只要将以上图【指由 1 至 10 的连续数填成的图】中，凡图中的三圈共有数字中有 > 5 者，就可做为依据。即：先将图中每个数字加 1，然后再将三圈共有的一数，取其一加 5，或将 5 分为二数，每数加一个共有数，但加后得到的数字，不得和其余八数相重复。由于 44 (6 + 5) 33，故可取每圈数字之和为 33 的图，先将图中每个数字加 1【如图解 55】再将三圈共有的数字 7 改为 12【如图解 56】



图解 55



图解 56

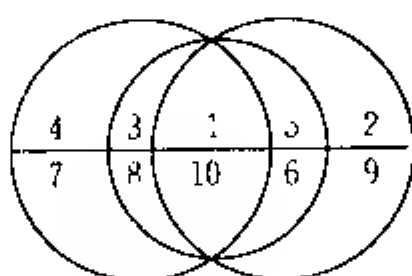
图解 56 中 10 个数字之和为 70，每圈六数之和为 44。

由上得知，将1至10的连续数字，填入此形的三圈图，由于图中两个三圈共有数字之和不同，所以每圈数字之和同一数时，可以填成的图的个数也不一样，由以上数据可得：

每圈六数之和	二圈共有数字之和 $b+e=(\quad)$	可填成不同的图的个数
29	1 + 2 = 3	1
30	1 + 4 = 5	1
31	1 + 6 = 7	2
	3 + 4 = 7	
32	1 + 8 = 9	2
	3 + 6 = 9	
33	1 + 10 = 11	3
	3 + 8 = 11	
	5 + 6 = 11	
34	3 + 10 = 13	2
	5 + 8 = 13	
35	5 + 10 = 15	2
	7 + 8 = 15	
36	7 + 10 = 17	1
37	9 + 10 = 17	1

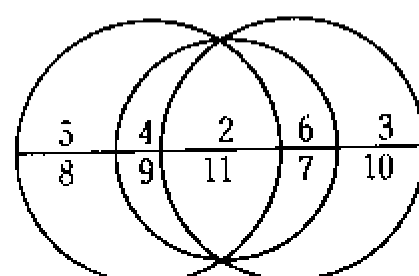
由上表可知，当每圈六数之和等于33时，可填不同的图3个，这3个图的二圈共有数字都有大于或等于5者，前面最后的图【图解56】就是由共有数字为5，6的图填成的。此外，还有两个，它同样适合要求，可做依据，继续做图填数如下：

仿前面方法，先取$b=1$，$e=10$，则$a=2$，$a+1=3$，$c=4$，$c+1=5$，$d-1=6$，$d=7$，$f-1=8$，$f=9$，依图解42填写可得图解57



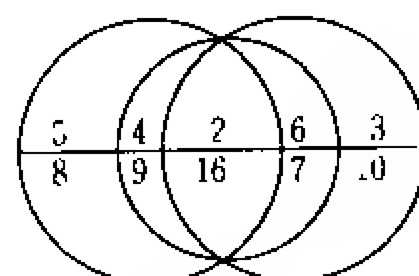
图解57

将图解 57 每数加 1 得 ⇒



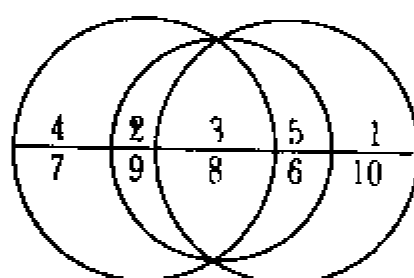
图解58

再将图解 58 中的“11”改为“16”：



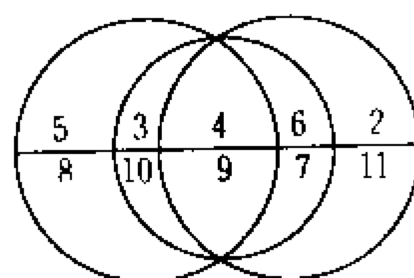
图解59

又取 $b=3$，$e=8$，则 $a=1$，$a+1=2$，$c=4$，$c+1=5$，$d-1=6$，$d=7$，$f-1=9$，$f=10$，依图解 42 填写可得图解 60



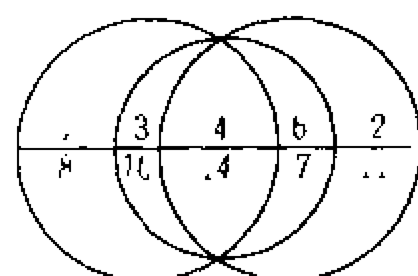
图解60

将图解 60 每数加 1 得 ⇒



图解61

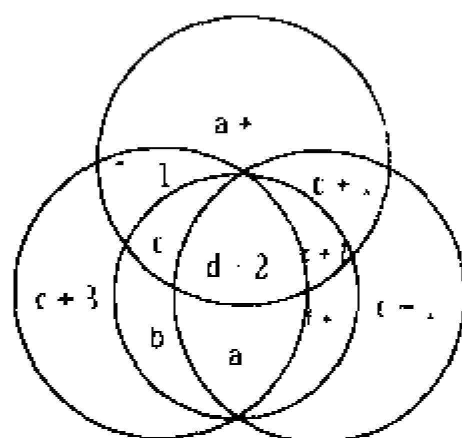
再将图解 61 中的“9”改为“14”可得图解 62。



图解62

此图如改为按相交点填数，则不能填数，其道理也和上(12)题末尾所说的一样，请读者试演之。

15. 仿上面讲过的方法作图：



图解63

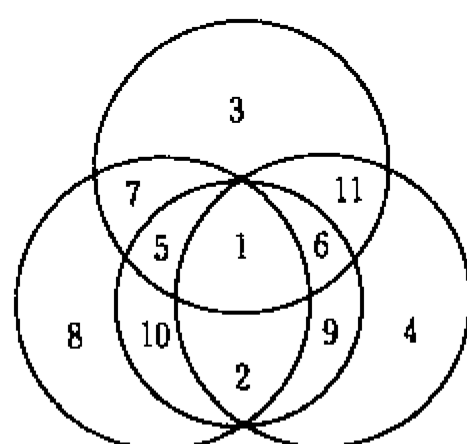
图解 63 有：a，$a+1$，
b，$b+1$，
$c+1$，$f-1$，$c+3$，$f+1$，
$d-2$，
e，$e-1$

易知图解 63 右边各数，可以凑成 11 个连续数，图中 $d-2$ 是 11 个数中，唯一为四个圆圈所共有的数，因此，$d-2$ 之值越大，则每个圈内六数之和也越大。而 $d-2$ 在这 11 个连续数中，只能代替 1、3、5、7、9、11【指由 1 至 11 的连续数，如果是由 2 至 12 的连续数，则 $d-2$ 只能代替 2、4、6、8、10、12】以图解 63 为依据，可分别填成下面各图：

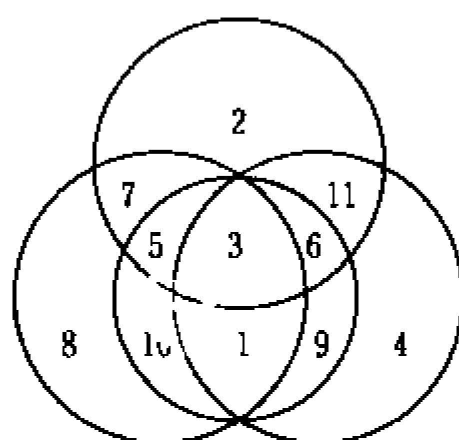
取 $d-2=1$，$a=2$，$a+1=3$，$e-1=4$，$e=5$，$c+1=6$，$f-1=7$，$c+3=8$，$f+1=9$，

$b = 10, b + 1 - 11$。

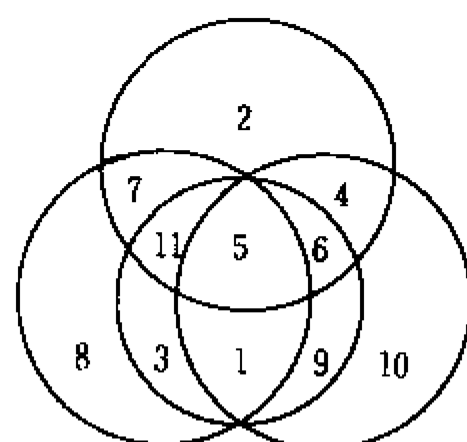
可填成图解 64，每圈六数之和为 33



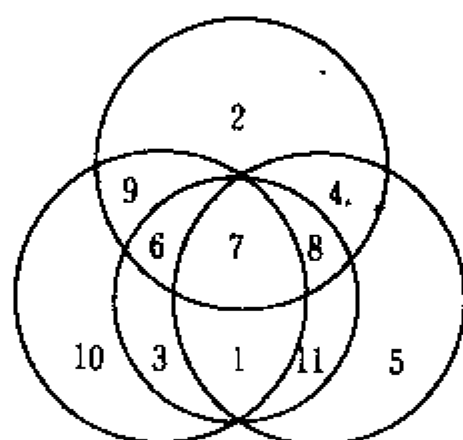
图解64



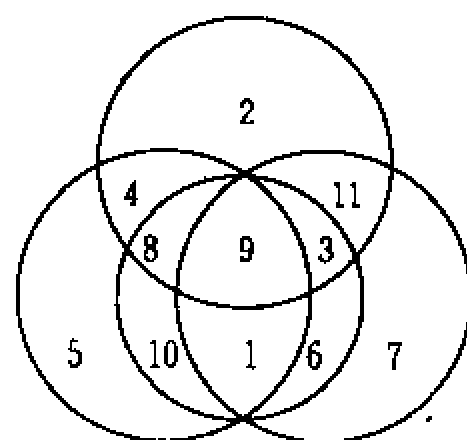
图解65



图解66



图解67



图解68

取 d $2 - 3$，$a - 1$，$a + 1 - 2$，$e - 1 - 4$，$e - 5$，$c + 1 - 6$，$f - 1 - 7$，$c + 3$ 8，$f + 1$ 9，b 10，$b + 1 - 11$，可填成图解 65，每圈六数之和为 34。

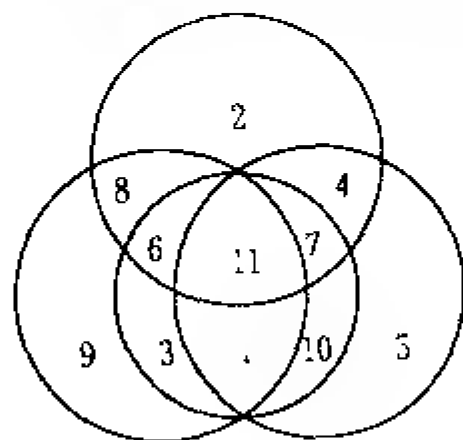
取 $d-2=5$, $a=1$, $a+1=2$, $b=3$, $b+1=4$, $c+1=6$, $f-1=7$, $c+3=8$, $f+1=9$, $e-1=10$, $e=11$, 可填成图解 66, 每圈六数之和为 35。

取 $d-2=7$, $a=1$, $a+1=2$, $b=3$, $b+1=4$, $e-1=5$, $e=6$, $c+1=8$, $f-1=9$, $c+3=10$, $f+1=11$, 可填成图解 67, 每圈六数之和为 36。

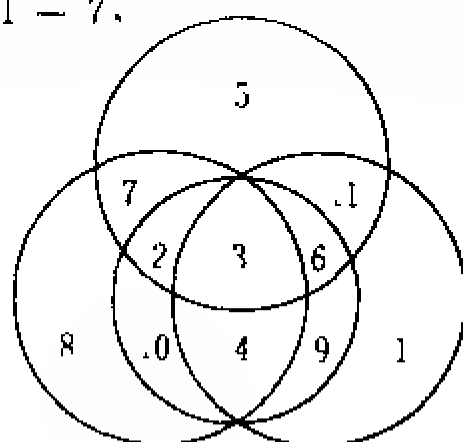
取 $d-2=9$, $a=1$, $a+1=2$, $c+1=3$, $f-1=4$, $c+3=5$, $f+1=6$, $e-1=7$, $e=8$, $b=10$, $b+1=11$ 可填成图解 68, 每圈六数之和为 37。

取 $d-2=11$, $a=1$, $a+1=2$, $b=3$, $b+1=4$, $e-1=5$, $e=6$, $c+1=7$, $f-1=8$, $c+3=9$, $f+1=10$, 可填成图解 69, 每圈六数之和为 38。

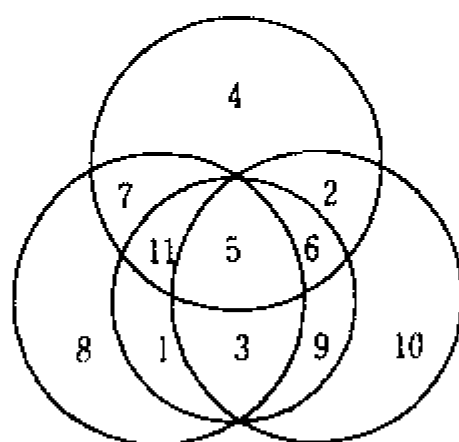
如仍以 $d-2=3$, 将其余各数变换, $a=4$, $a+1=5$, $e-1=1$, $e=2$, $c+1=6$, $f-1=7$,



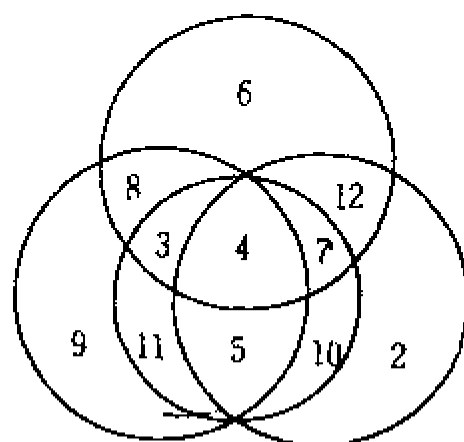
图解69



图解70



图解71



图解72

$c+3=8$，$f+1=9$，$b=10$，$b+1=11$，填成图解 70，每圈数字之和仍等于 34。

如仍以 $d+2=5$，将其余各数变换 $a=3$，$a+1=4$，$b=1$，$b+1=2$，$c+1=6$，$f-1=7$，$c+3=8$，$f+1=9$，$e=11$，$e-1=10$，填成图解 71，每圈六数之和仍等于 35。

由以上得知，凡以 1 至 11 的连续数填此种三圈图，得到每圈六数之和分别有：33、34、35、36、37、38。

如果要求用连续数填这种三圈图，每圈内六数之和大于 38，可依以上各图推算填写。如要求每圈内数字之和等于 40，可推算如下：

因 $40-38=2$，不为 6 所整除，

$40-37=3$，不为 6 所整除，

$40-36=4$，不为 6 所整除，

$40-35=5$，不为 6 所整除，

$40-34=6$，除以 6，其商为 1，

$40-33=7$，不为 6 所整除

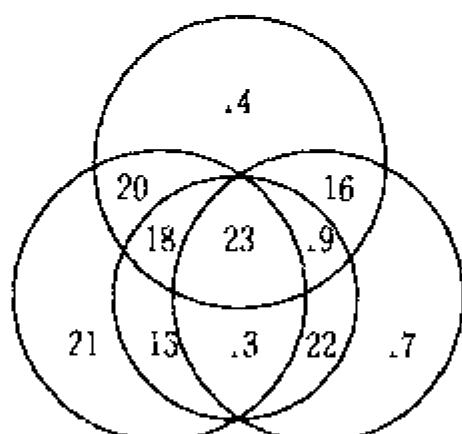
故可按照每圈六数之和为 34 的图，【如图解 70】将图中每数加 1，可填成图解 72。

如果要求这 11 个数字之和大于 66，【因为 1 至 11 的连续数之和为 66】例如取 11 数之和为 200，因 $200-66=134$ 不为 11 所整除，故知 200 不是 11 个连续数之和。

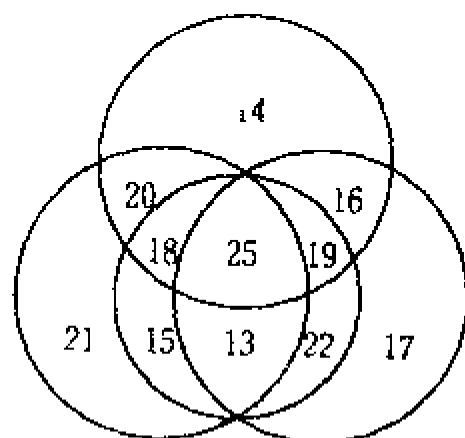
因 $\left[\frac{200-66}{11}\right]$ 取整数部分 12，余数 2，也就是说取 13 至 23 的连续数后还余 2。故将 1 至 11 的连续数的图中数字每个加 12，再将四圈共有的数字即 $d+2$，再加 2。为了使 $(d+2)$ 加 2 后，其值不和其余 10 数相同，可选择 $d+2=11$ 这个图【即每圈六数之和为 38 的图解 69】为依据，先将图中的数字每数加 12，然后再将四圈共有的数字再加 2。即：图解 73、图解 74。

图解 74 中 11 个数字之和为 200，每圈六数之和为 112。

又如果把图解 63 变换成中间这个圆圈内的六个代数【指英文字母】全部不带正负符号的数字，如图解 75，由于 a 和 $a+2$ 不成连续数，为了要把这 11 数凑成连续数，只有把 d 夹在 a 和 $a+2$ 之间，凑成三个连续数。



图解73



图解74

在图解 75 中，如果仍取 1 至 11 的连续数，则 d 的取值只有取偶数，即 2、4、6、8、10。每圈六数之和也随着 d 值而增大，对应等于 33、34、35、36、37。读者不妨制图验证。

如果要求 11 个数字之和为 200，且规定每圈六数之和的话，则由于计算较复杂，填数难度就更大了；计算如下：

$$200 = \frac{(2a_1 + 10d)11}{2}$$

这是等差数列公式，a_1 是首项，d 是公差。

简为 $200 = 11a_1 + 55d$

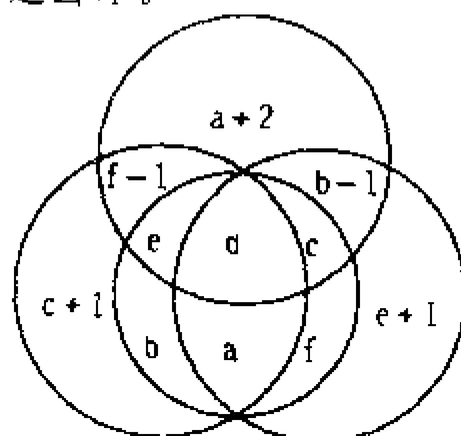
于是有：

当 $d = 1$ 时，$a_1 = 13$　余数 2

$d = 2$ 时，$a_1 = 8$　余数 2

$d = 3$ 时，$a_1 = 3$　余数 3，

造表于后：



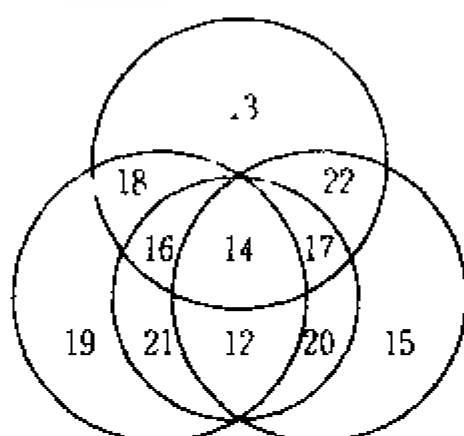
图解75

序号	数列 $a_1 \cdots a$												每列十数之和	每圈六数之和							一圈共有数应再加的数。
	d	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}		由1至11填数每圈之和	33	34	35	36	37	38	
1	1	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	198		105	106	107	108	109	110	200−198=2
2	1	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	187		99	100	101	102	103	104	200−187=13
3	1	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	176		93	94	95	96	97	98	200−176=24
4	1	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	165		87	88	89	90	91	92	200−165=35
5	1	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	154		81	82	83	84	85	86	200−154=46
6	1	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	143		75	76	77	78	79	80	200−143=57
7	1	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	132		69	70	71	72	73	74	200−132=68
8	1	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	121		63	64	65	66	67	68	200−121=79
9	1	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	110		57	58	59	60	61	62	200−110=90
10	1	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	99		51	52	53	54	55	56	200−99=101
11	1	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	88		45	46	47	48	49	50	200−88=112
12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	77		39	40	41	42	43	44	200−77=123
13	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	66		33	34	35	36	37	38	200−66=134
14	2	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	198		102	104	106	108	110	112	200−198=2
15	2	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	176		90	92	94	96	98	100	200−176=24
16	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	154		78	80	82	84	86	88	200−154=46
17	2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	132		66	68	70	72	74	76	200−132=68
18	2	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	187		96	98	100	102	104	106	200−187=13
19	2	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	165		84	86	88	90	92	94	200−165=35
20	2	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	143		72	74	76	78	80	82	200−143=57
21	2	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	121		60	62	64	66	68	70	79
22	3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	198		99	102	105	108	111	114	2
23	3	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	187		93	96	99	102	105	108	13
24	3	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	176		87	90	93	96	99	102	24

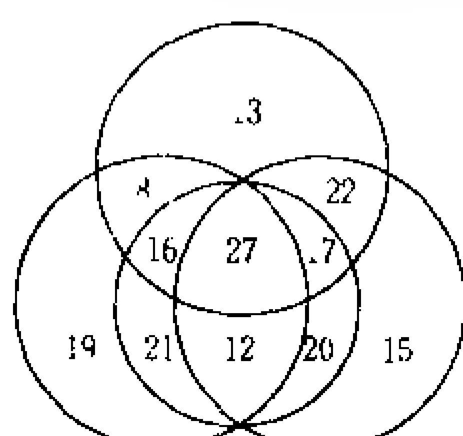
当图中11个数字之和等于200时，上表可做每圈六数之和等于101至172（但并不是中间任一数都可以，例如102，103就不成了）的填数依据。

仍以 11 个数之和等于 200，要求每圈六数之和等于 113。根据前面造表查找可得：

上表第 2 横行"每圈六数之和"中有"100"、"每圈共有数应再加的数"有"13"，即：100 + 13 = 113，而"100"顶上有"34"。因此，可将此行的数列依照 1 至 11 连续数填成每圈六数之和等于 34 的图如图解 65，对应可填成图解 76，再将图解 76 中共有数 14 加 13，可填成图解 77。

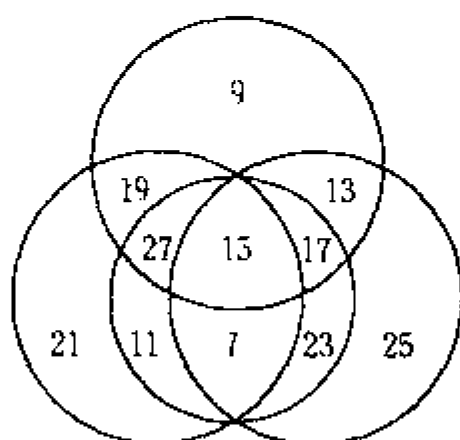


图解76

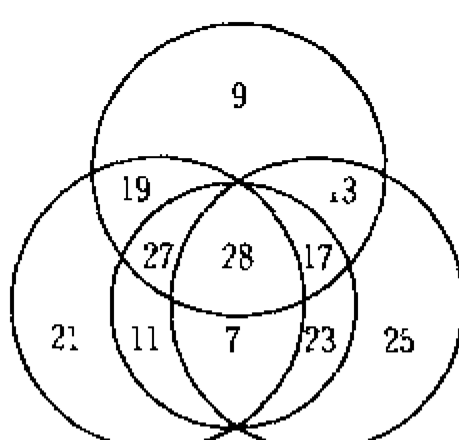


图解77

上表第 18 横行有同样情况，同样可得到图解 78，再将图解 78 中共有数 15 加 13，可填成图解 79。



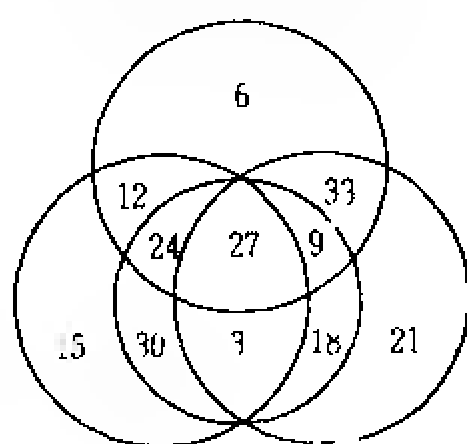
图解78



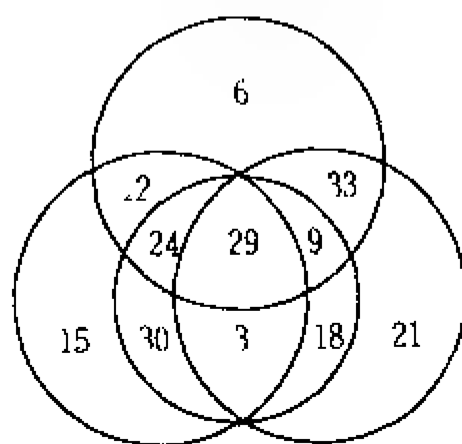
图解79

上表第 22 横行后尾有"111"和"2"，用同样方法可得到图解 80，再将图解 80 中共有数 27 加 2，可填成图解 81。

根据上表、按要求可填成上面图77、图79、图81三个图。



图解80



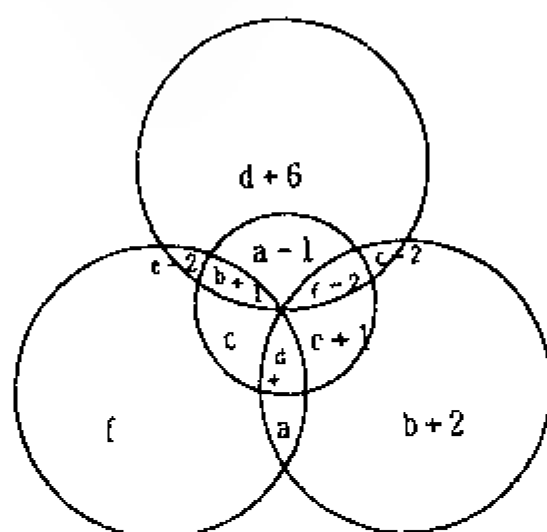
图解81

16. 仿上题的方法做图解82

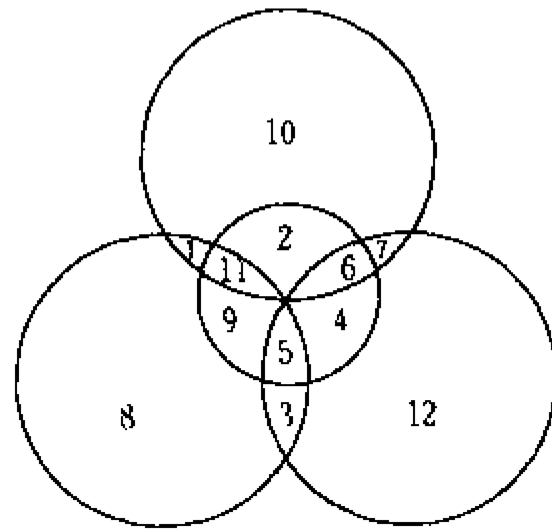
令：$e-2=1$，$a-1=2$，$a=3$，$e+1=4$，$d+1=5$，$f-2=6$，$c-2=7$，$f=8$，$c=9$，$d+6=10$，$b+1=11$，$b+2=12$，可填成下图解83，每圈六数之和等于37。

如果将各个代数值交换，即令：

$d+1=1$，$c-2=2$，$f-2=3$，$c=4$，$f=5$，$d+6=6$，$e-2=7$，$a-1=8$，$a=9$，$e+1=10$，$b+1=11$，$b+2=12$，依图解82，可填成图解84，每圈六数之和等于37。



图解82



图解83

再令:$b+1$ 1,$b+2$ 2,$d+1-3$,f $2-4$,c $2-5$,f 6,c 7,$d+6$ 8,e 2 9,a 1 10,

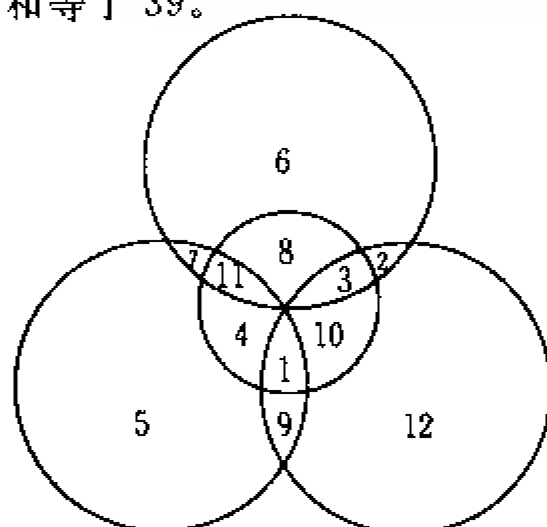
$a-11$,$e+1$ - 12,依图解 82,可填成图解 85,每圈六数之和等于 37。

如果将图中心圆圈全免掉正负符号数更容易得到图解 86

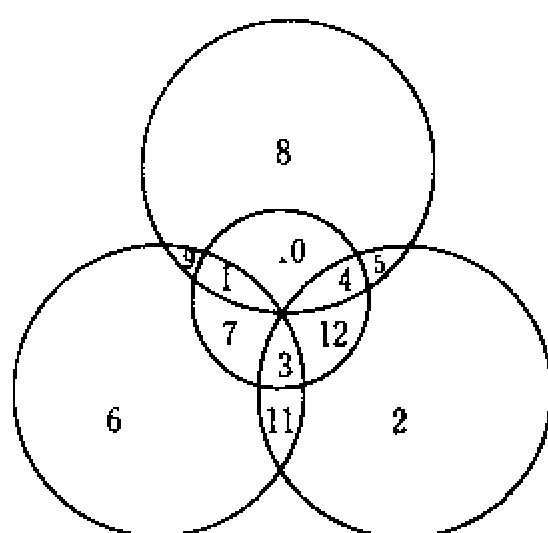
令:d 1,$d+1$ 2,$b-3$,$b+1$ - 4,f - 2 5,

c $2-6$,$f-7$,c 8,a 9,$a+1$ 10,

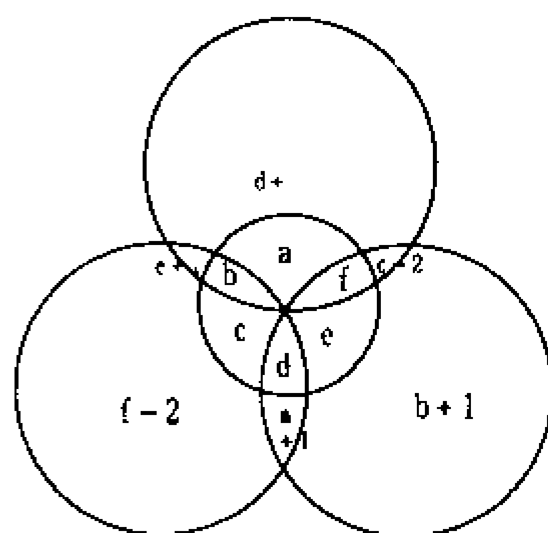
$e-11$,$e-1$ - 12,依图解 86,可填成下图解 87,每圈六数之和等于 39。



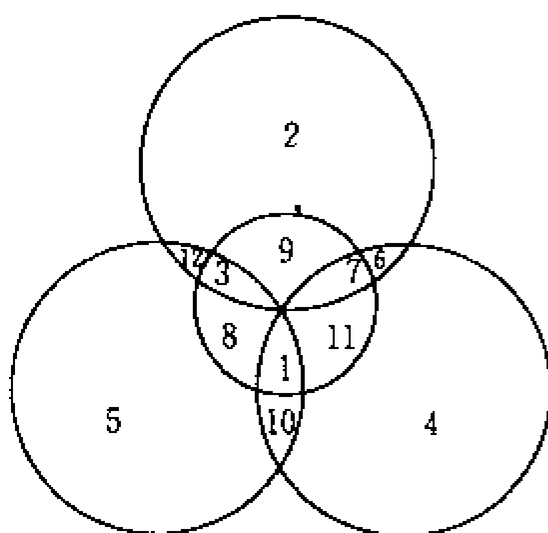
图解84



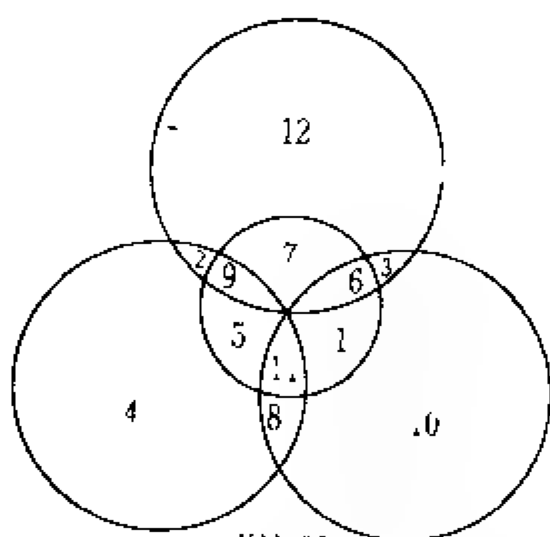
图解85



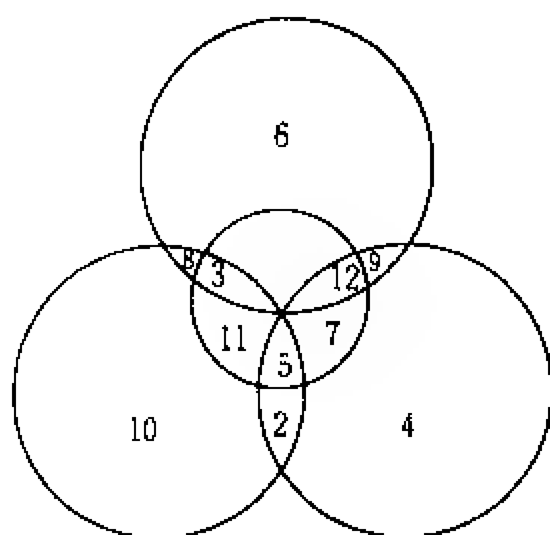
图解86



图解87



图解88



图解89

如果将各个代数值交换，即令：

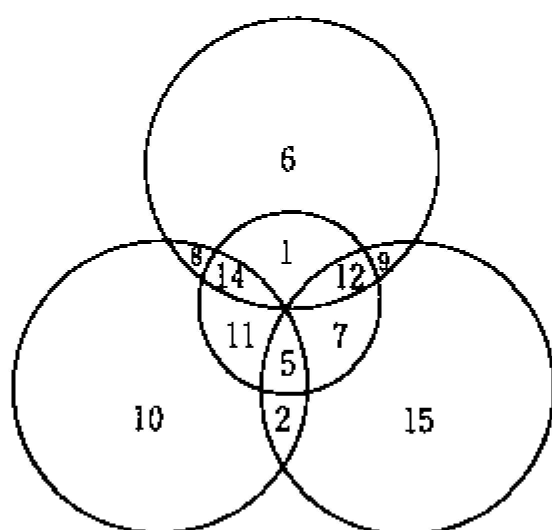
$e=1$，$e+1=2$，$c-2=3$，$f-2=4$，$c=5$，$f=6$，$a=7$，$a+1=8$，$b=9$，$b+1=10$，$d=11$，$d+1=12$，依图解 86，可填成图解 88，每圈六数之和等于 39。

再令：$a=1$，$a+1=2$，$b=3$，$b+1=4$，$d=5$，$d+1=6$，$e=7$，$e+1=8$，$c-2=9$，$f-2=10$，$c=11$，$f=12$，依图解 86，可填成图解 89，每圈六数之和等于 39。

由上得知，按图解 82 在 1 至 12 的数字中，各个代数值虽然交换使用，但每圈六数之和仍是 37；图解 86 也如此，各代数值交换后，每圈六数之和仍是 39。因此，凡是取每圈六数之和大于 37，都可以这二个原图【即图解 82，图解 86】选择其一为依据，进行推算填图，当然这样做后，12 个数字就不强求为连续数了【如果每圈六数之和比 37 所多出的数等于 6 的倍数，则这 12 个数就可取为连续数】。

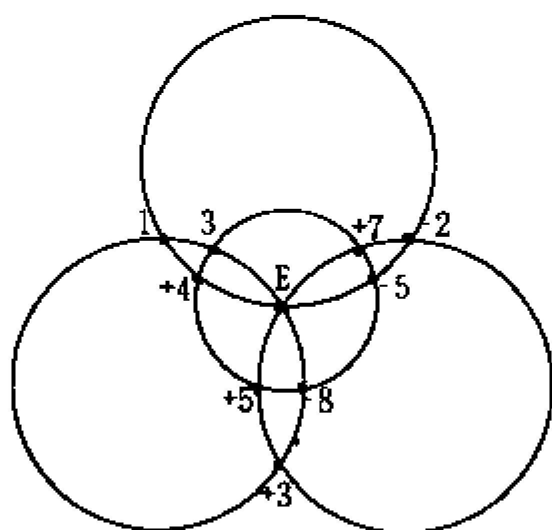
现在再填一个每圈六数之和等于 50 的四圈图。

因 $50-39=11$，可将图解 86 和由图解 86 填成的三个图为依据，看图中哪一个数加 11 后，不和其余各数重复，就取这数。如取"$b=3$"再加 11，得到 $b=14$，而 $b+1=15$，其余 10 数照原不变，得到图解 90，每圈 6 数之和等于 50。

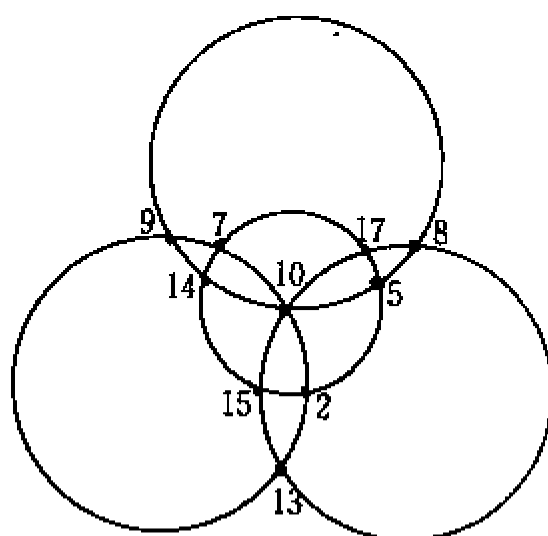


图解90

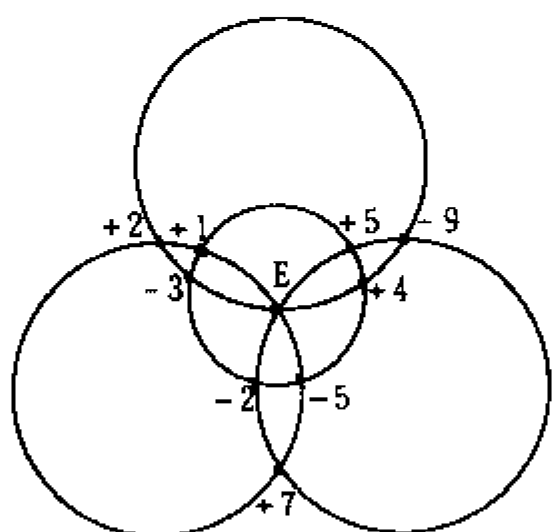
如果将上图改为按交叉点填数，则用每点填上E、使每圈7数等于$7E$，可得图解91，图解93，在图解91中，取$E=10$，每圈7数之和等于70，在图解93中，如取$E=10$，每圈7数之和等于70。



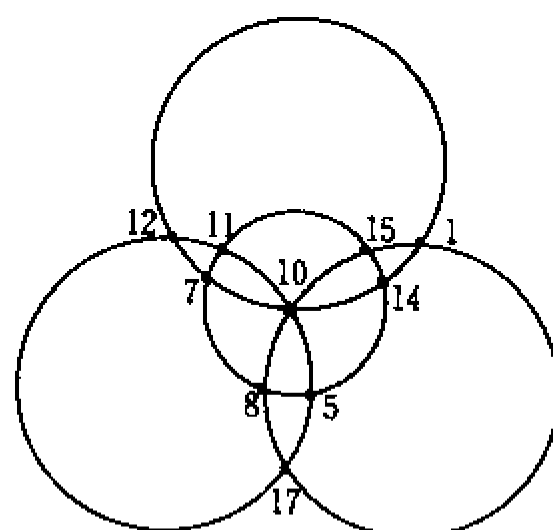
图解91



图解92



图解93

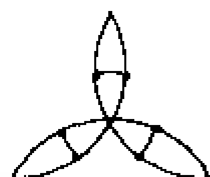


图解94

如果用1至10的连续数填图，虽不能做从每圈看都有a、b、c、

d、e、f、g 7 数，但可以通过以下的计算填数：

由图得知，在 E 的三边，即



每边交点上的二数之和必相等，【设每边等于 K】又因 1 至 10 的连续数之和等于 55，故每边三数之和：$\frac{55-E}{3}=K$，已知 $E \leqslant 10$

可解得：$E=1,4,7,10$.

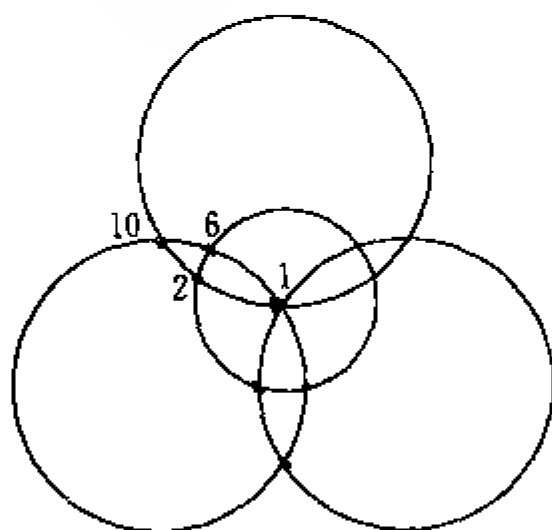
当 $E=1$ 时，则 $K=18$

我们将 2 至 10 的连续数分为三组，每组(K)等于 18，就可得到，且仅得到以下二种情况：

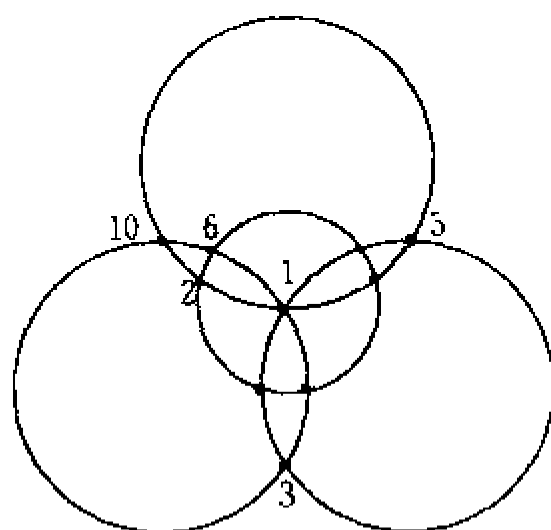
(一)10，6，2，　9，4，5，　8，3，7；

(二)10，5，3，　9，2，7，　8，4，6。

由图易知，图外围三数之和也等于 K，而这三数是从每组中抽一数，现先将(一)的三组填图，随便将一组填入图的一边，如图解 95。这时，图解 95 外围剩下的二点，只能填 5、3，即图解 96。剩下的按组分别填在每边(即　　)的空点上，于是可得图 97，每圈 7 数之和等于 37。



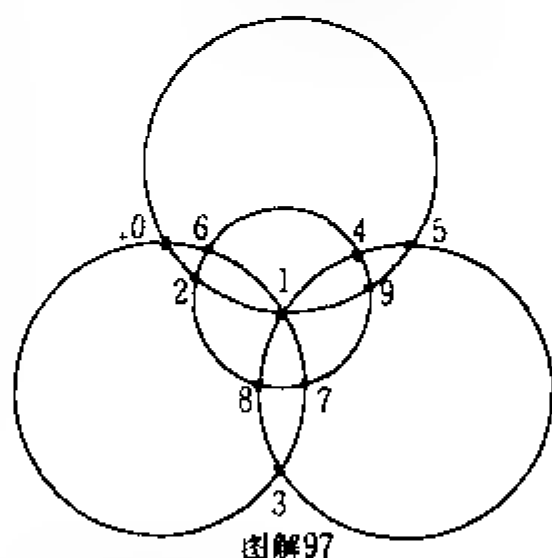
图解95



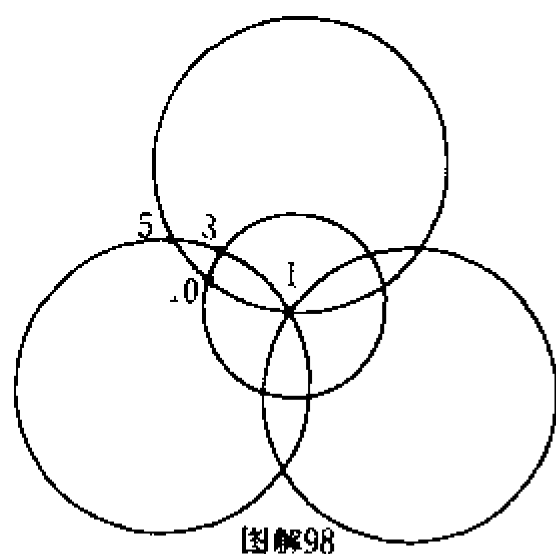
图解96

显然(一)的三组,用同样方法还可以填成多排列不同的图。

再以(二)的三组填图,按同样方法,先填图解 98,再填图解 99,最后填图解 100,每圈 7 数之和等于 37。



图解97



图解98

当 $E=4$,时,则 $K=17$。

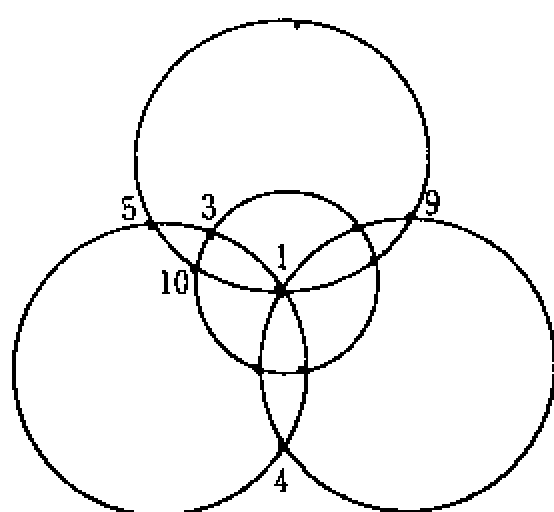
我们将 1,2,3,5,6,7,8,9,10 分为三组,每组(即 K)=17,也只有以下二种情况:

(三)10,1,6,　　9,3,5,　　2,7,8;

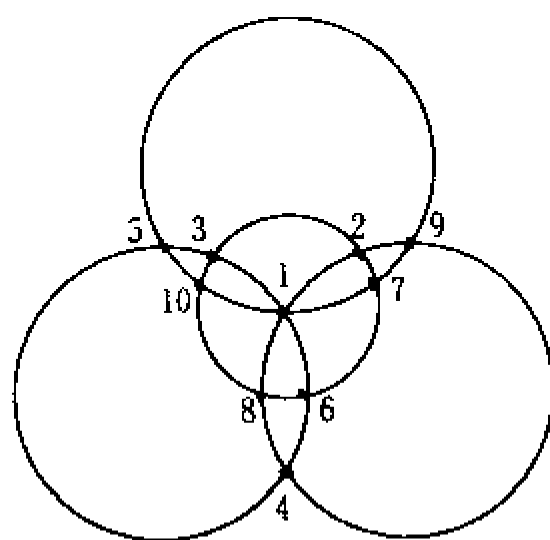
(四)10,2,5,　　9,1,7,　　8,3,6。

将(三)的三组填图,用同样的方法可得:先填图解 101,再填图解 102,最后填图解 103,每圈 7 数之和等于 38。

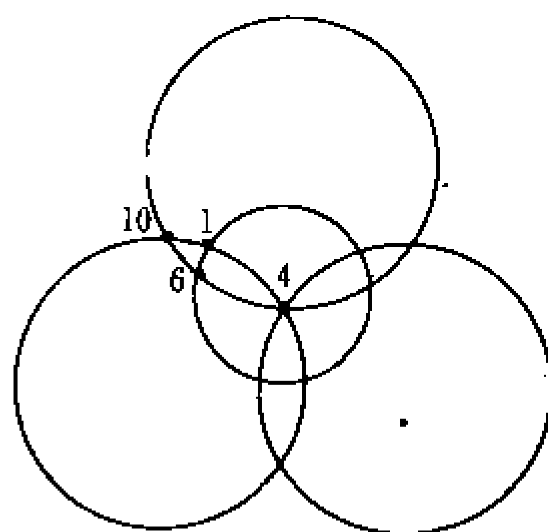
将(四)的三组填图,用同样方法可得:先填图解 104,再填图解 105,最后填图解 106,每圈 7 数之和等于 38。



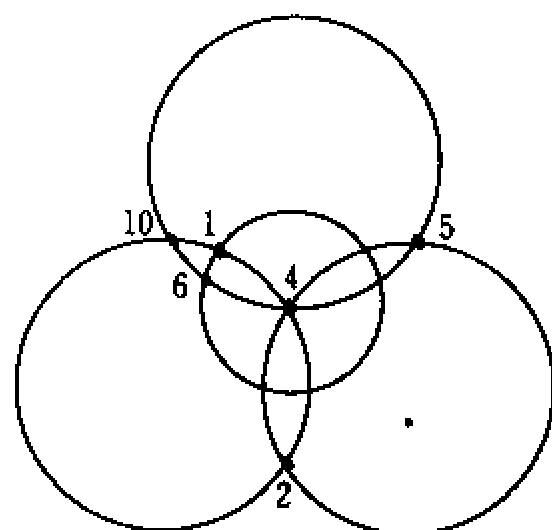
图解99



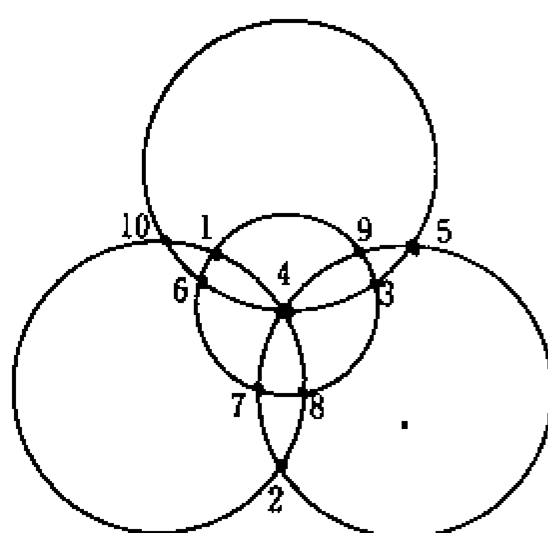
图解100



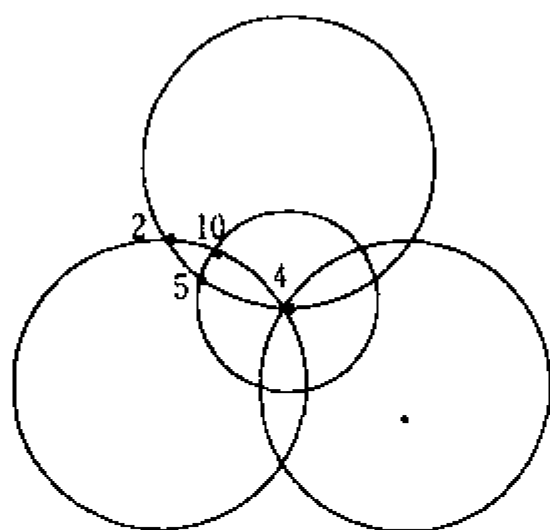
图解101



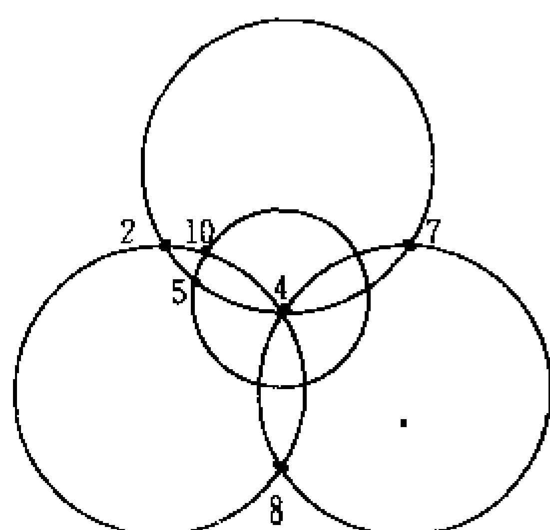
图解102



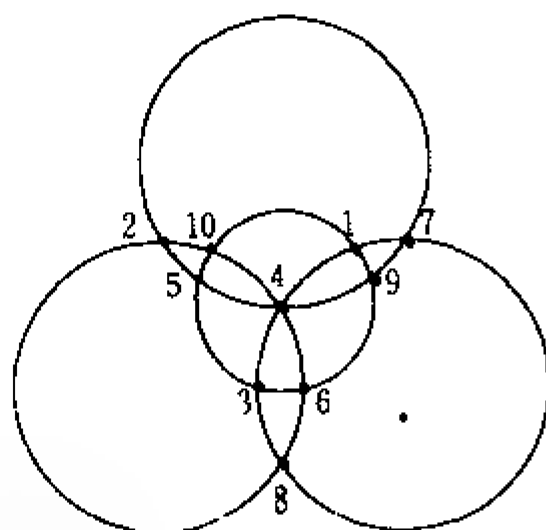
图解103



图解104



图解105



图解106

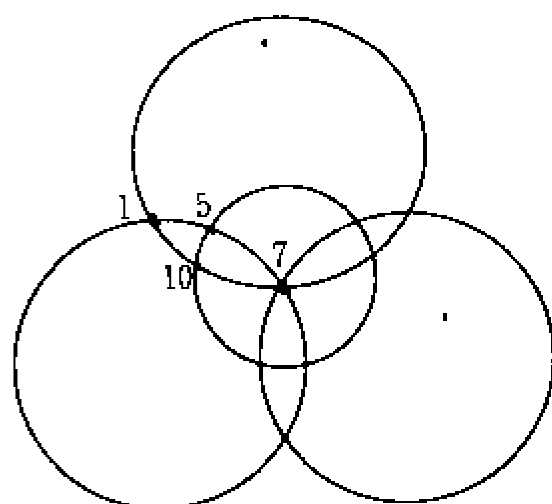
当 E · 7 时，则 K – 16

我们将 1、2、3、4、5、6、8、9、10 分为 三组，每组（即 K） – 16，也有二种情况：

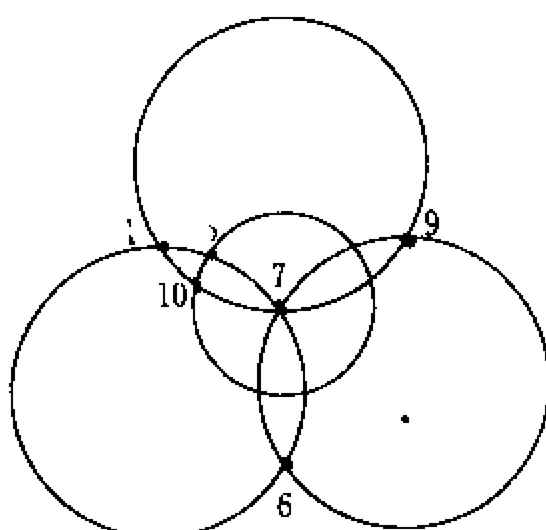
（五）10、1、5，　9，3，4，　2，6，8；

（六）10，2，4，　9，1，6，　8，3，5。

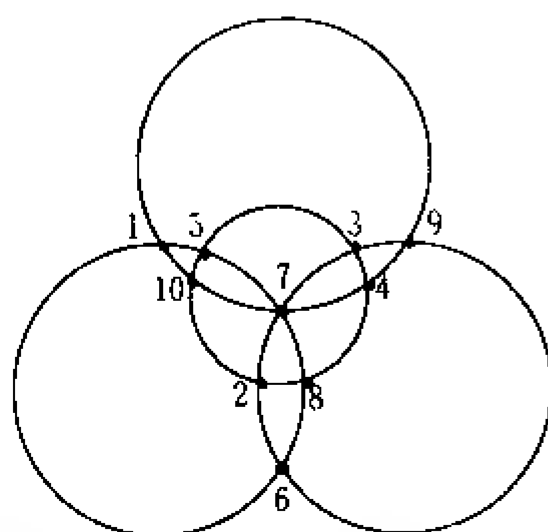
将（五）的 三组填图，用同样方法可得：先填图解 107。再填图解 108，最后填图解 109，每圈 7 数之和等于 39。



图解107

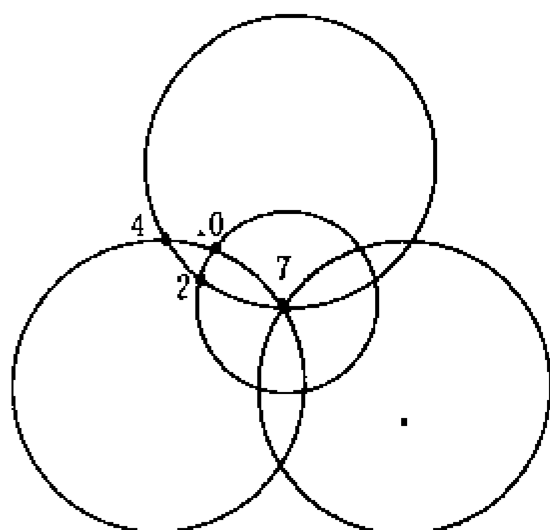


图解108

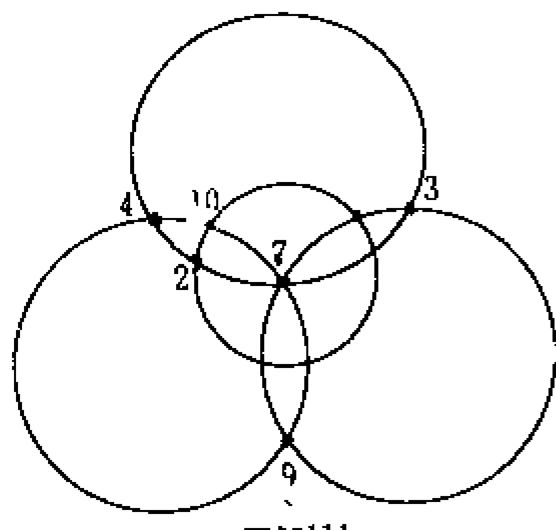


图解109

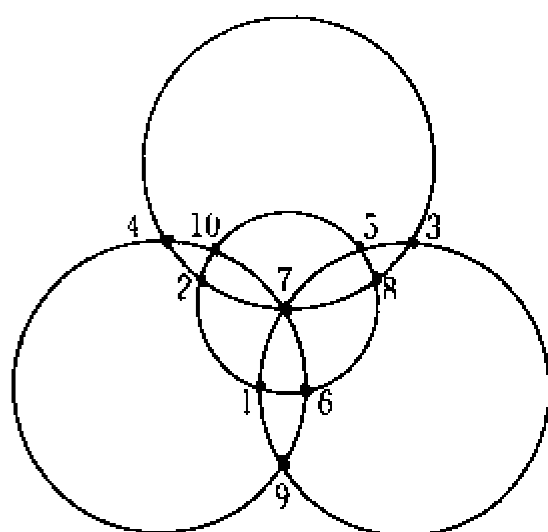
将(六)的三组填图，用同样方法可得：先填图解110。再填图解111，最后填图解112，每圈7数之和等于39。



图解110



图解111



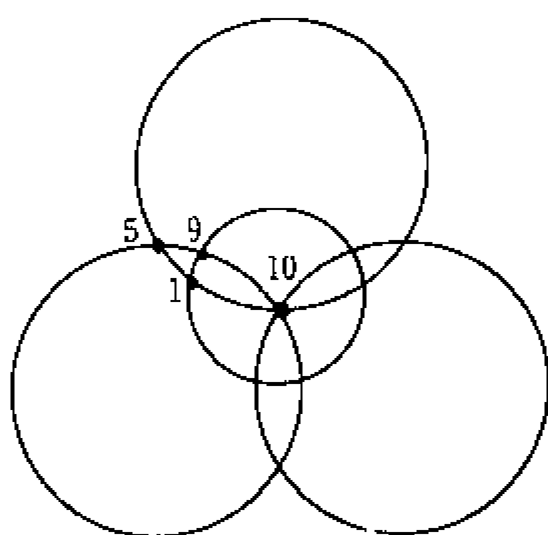
图解112

当 E 10时,则 – 15。我们将1至9的连续数分为三组,每组(K) – 15,也有三种情况:

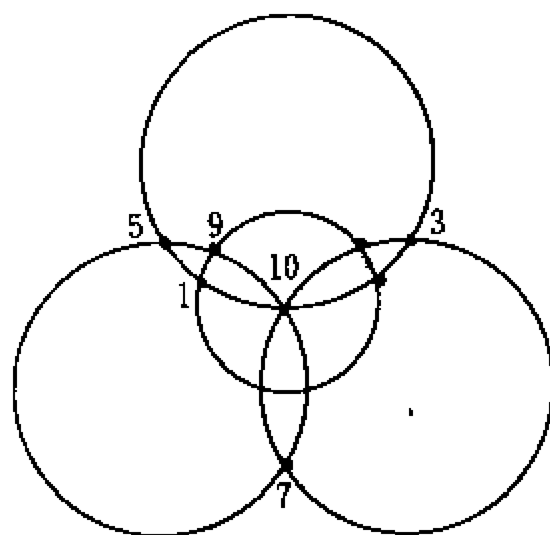
(七)9,1,5, 8,3,4, 7,2,6;

(八)9,2,4, 8,1,6, 7,3,5。

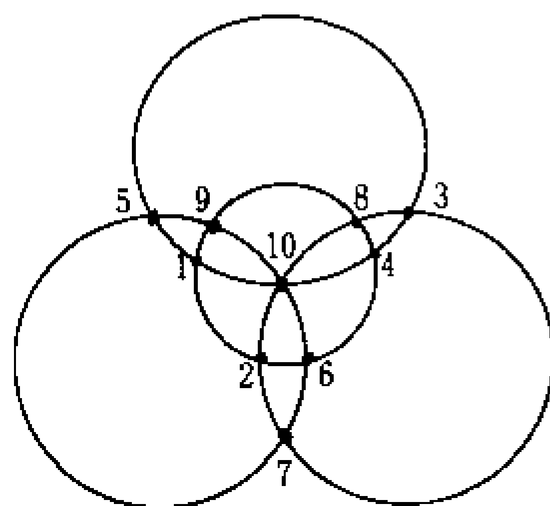
将(七)的三组填图,同样方法可得:先填图解113,再填图解114,最后填图解115,每圈7数之和等于40。



图解113

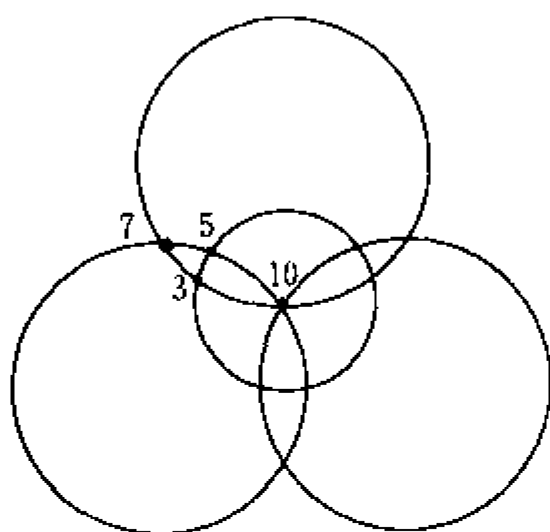


图解114

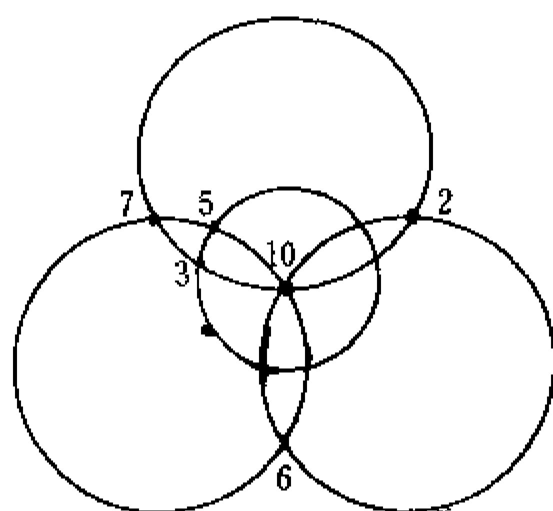


图解115

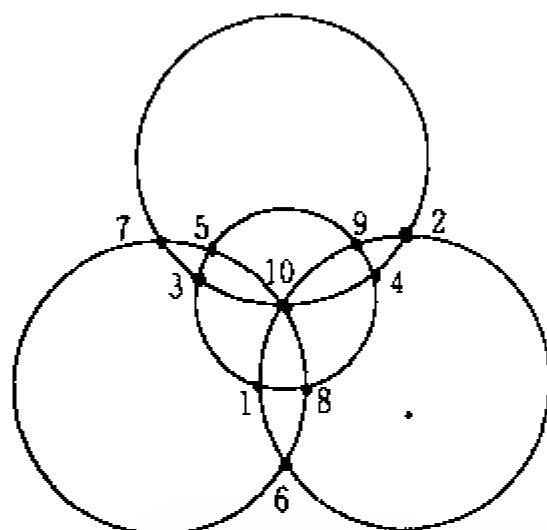
将(八)的 二组填图.同样方法可得:先填图解 116,再填图解 117,最后填图解 118,每圈 7 数之和等于 40。



图解116



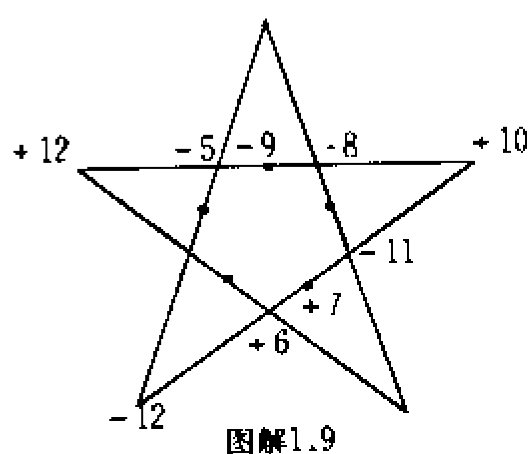
图解117



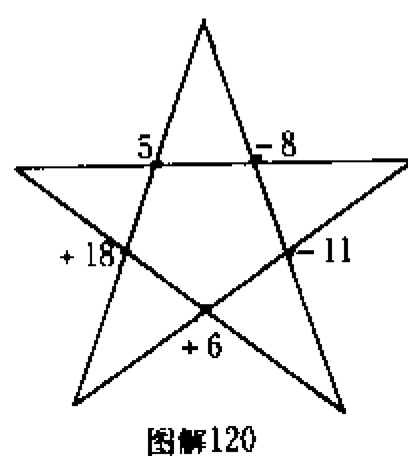
图解118

由上得知，凡要求图中10数之和大于55或每圈7数之和大于40，都可以把以上【由1至10的连续数】每圈7数之和等于37、38、39、40四个图为依据，然后再通过计算去填数。

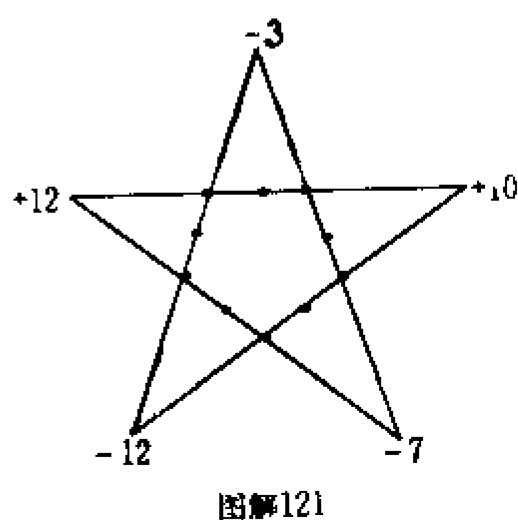
17. 按第二节，使每行等于5个E，先利用第十四章第二节中图$A7$取其上横、右直二行数字填入五角星图的横、斜二行即图解119，其次把图解119内五个交叉点中剩下的一点填上+18，使这五数之和等于5个E如图解120，再次把图解119中五个顶角剩下的二角，填上 3， -7，使这五数之和仍等于5个E，如图解121，最后剩下二个斜行，每行只有一点未填，于是再通过简单的计算，就很容易填成图解122，其中$E \geqslant 30$，如取$E=30$，可填成图解123，每行五数之和为150。



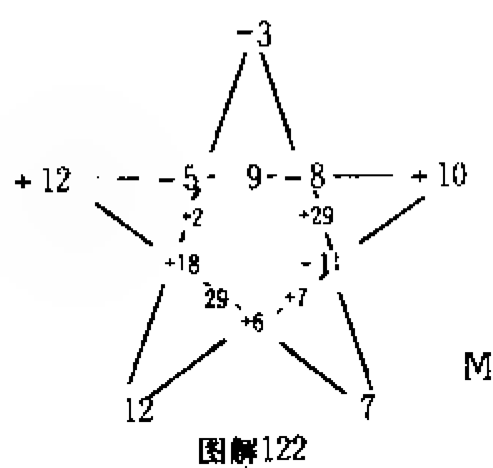
图解1.9



图解120

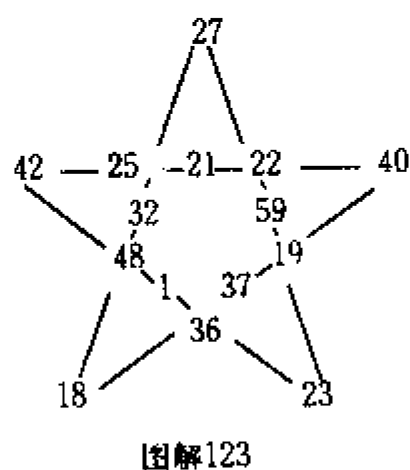


图解121

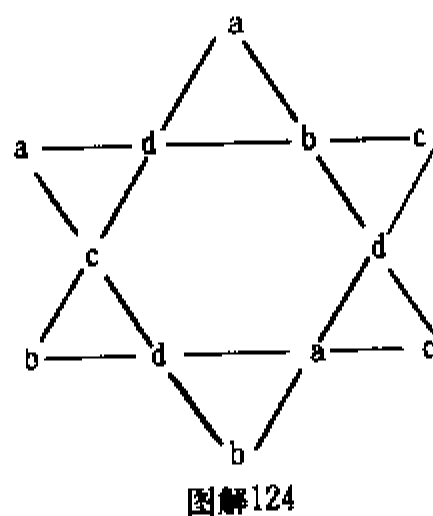


图解122

18. 使六角形图每行等于 a、b、c、d 四数之和，作图解 124。

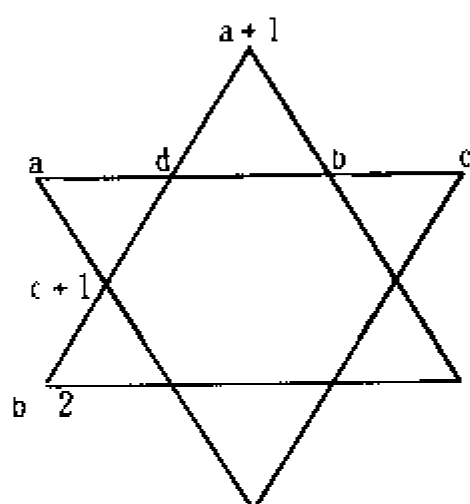


图解123



图解124

仿第四节，先填图的左斜行，如图解 125。



图解125

同时写：

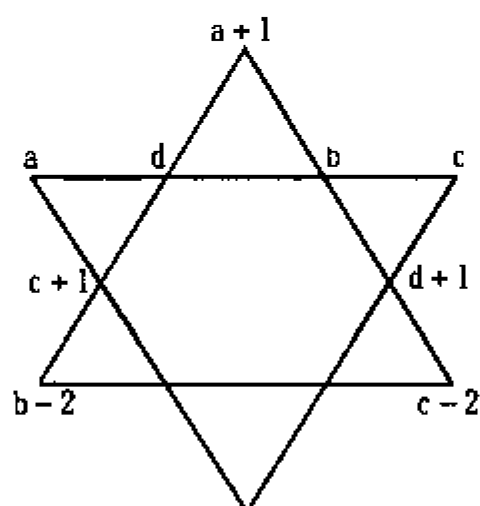
a、$a+1$

b、$b-2$

c、$c+1$

d

填图的右斜行，如图解 126。



图解126

同时写：

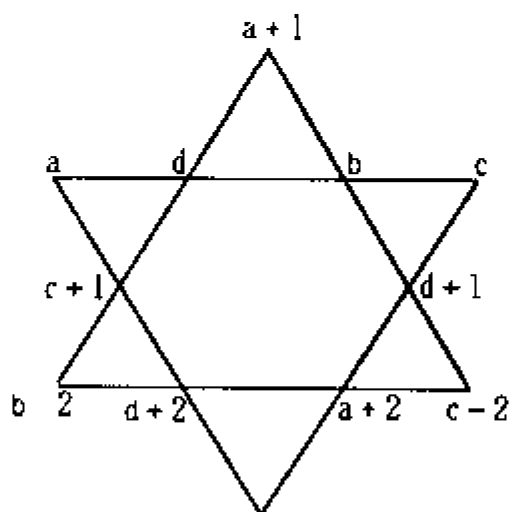
a、$a+1$

b、$b-2$

c、$c+1$，$c-2$

d、$d+1$

填图的下横行如图解 127。



图解127

同时写：

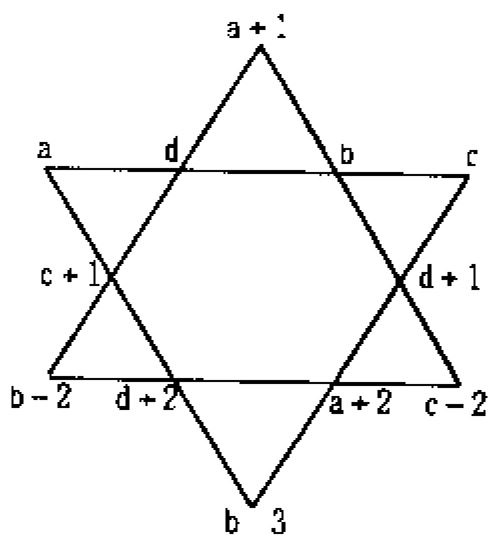
a、$a+1$、$a+2$

b、b 2

c、$c+1$、$c-2$

d、$d+1$、$d+2$

从右填图的下角，如图解128。



图解128

同时写：

a、$a+1$、$a+2$

b、$b-2$、$b-3$

c、$c+1$、$c-2$

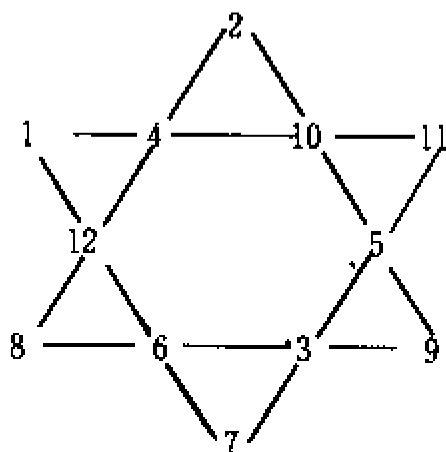
d、$d+1$、$d+2$

令 $a=1$，$a+1=2$，$a+2=3$

$d=4$，$d+1=5$，$d+2=6$

$b=10$，$b-2=8$，$b-3=7$

$c=11$，$c+1=12$，$c-2=9$

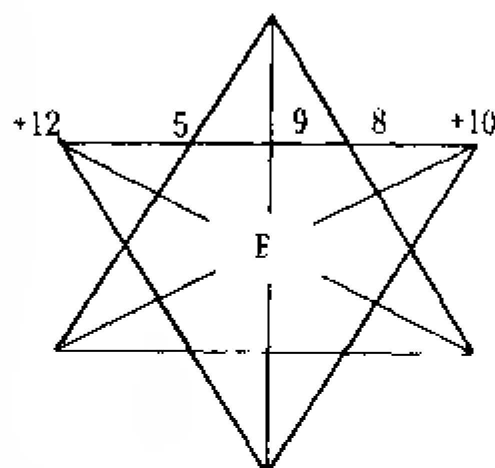


图解129

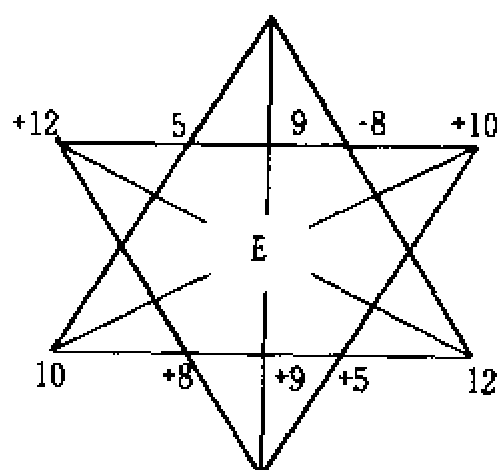
于是可填成图解129，每行数字之和等于26。

19. 使六角形图每行等于5个E，中间点为E，按第二节利用图$A7$，取其上横行数填在六角形图的上横行，如图解130，并反其正

负号对应填下横行，如图解 131。

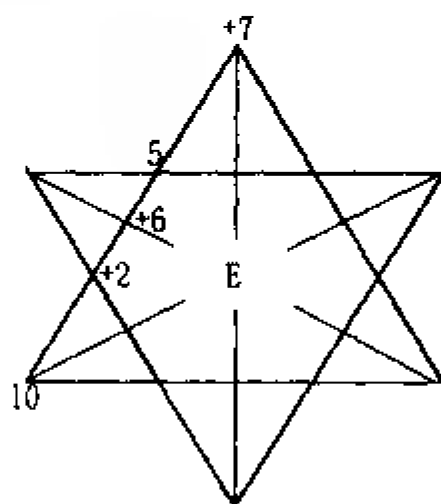


图解130

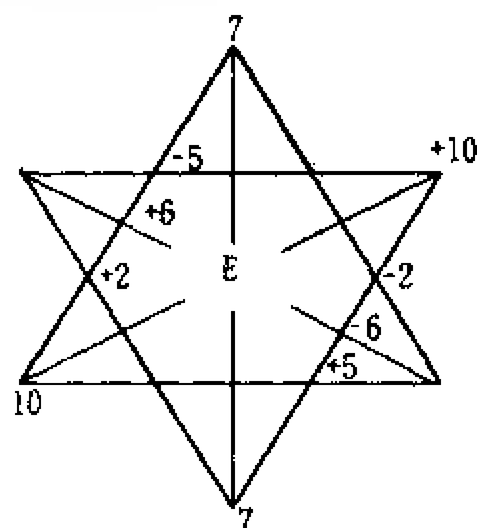


图解131

这时从图解 131 看，左斜行已有三数之和等于 −15，于是可选三数之和等于 15，如选 2、6、7【也可选 1、3、11，余类推】可填成图解 132，同时反其正负符号对应填与此行平行的另一斜行，如图解 133。



图解132

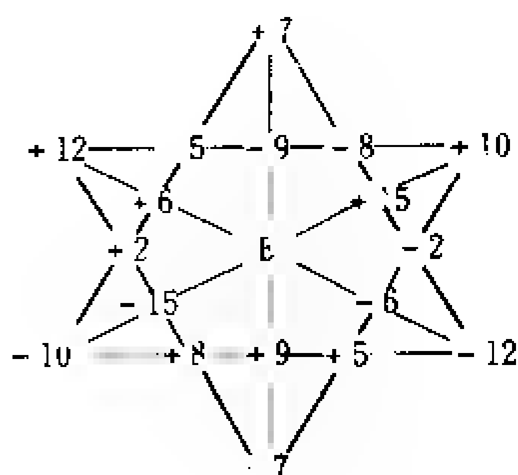


图解133

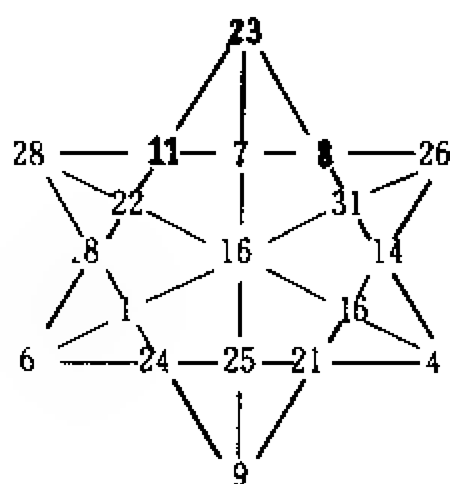
最后只剩下右斜行上有一点未填，就很容易填成图解 134，如取 $E=16$，可填成图解 135，每行五数之和等于 80。

如果要求这 19 数字是连续数，则仍仿第二节的方法，进行推算得到图解 136。

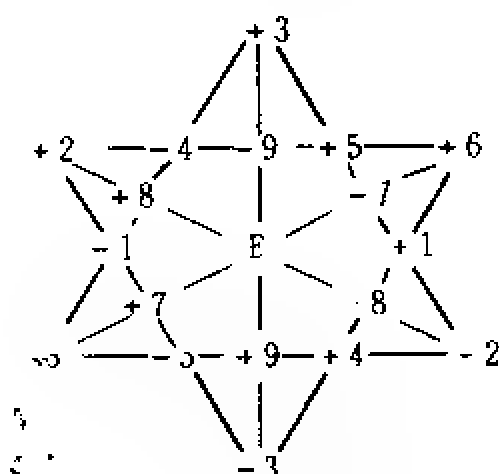
如取 $E=10$，可填成图解 137，每行五数之和等于 50。



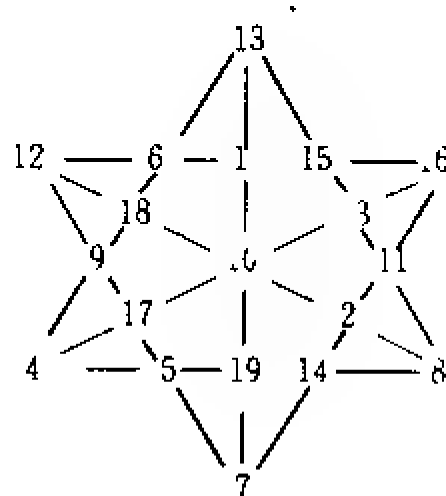
图解134



图解135

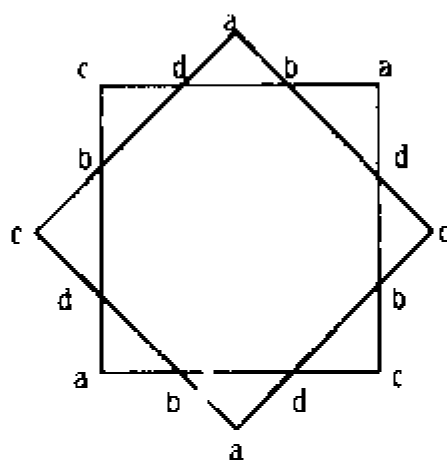


图解136

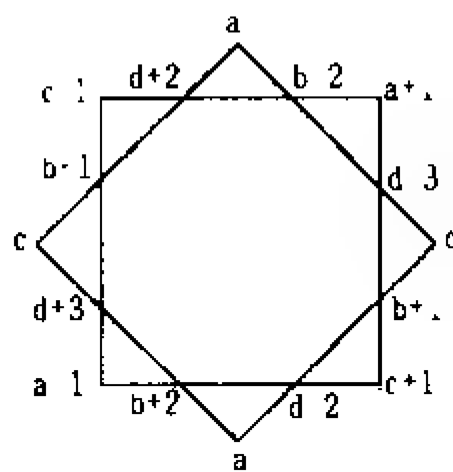


图解137

20. 作八角形图，使每行都有 a、b、c、d 四数如图解 138。



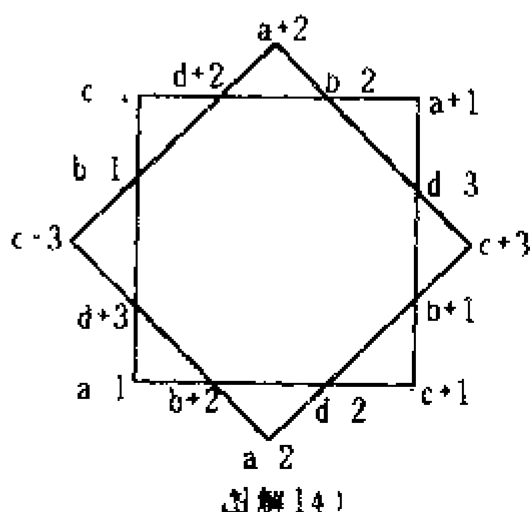
图解138



图解139

再按第四节，利用图 A16，将图 A16 的上横、左直二行的数字，【指其中的阿拉伯数字和正负符号】填入八角图中的上横左直二行中，同时反其正负号对应填下横、右直二行，如图解 139。

这时，就很容易选得 $a\pm 2$ 和 $c\pm 3$ 填入剩下的四个角。如图解 140。



图解 141

由图写：$a-2$，$a-1$，$a+1$，$a+2$

$b-2$，$b-1$，$b+1$，$b+2$

$c-3$，$c-1$，$c+1$，$c+3$

$d-3$，$d-2$，$d+2$，$d+3$

将以上右边的代数选择其值，仿第四节方法，从最小数取起，递次加多。

第一行，因 $a-2$ 最小

故取 $a-2=1$，得到 $a-1=2$，$a+1=4$，$a+2=5$。

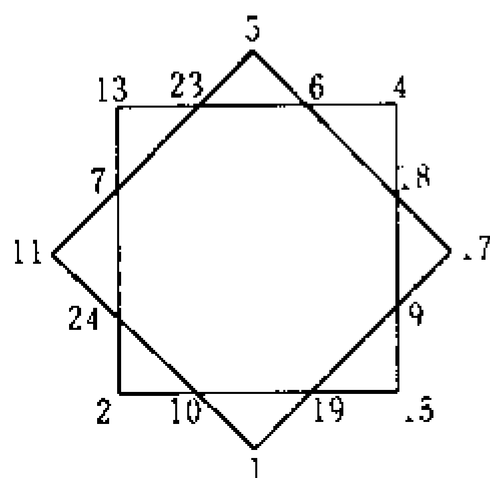
第二行，因 $b-2$ 最小，先试算一下，如取 $b-2=3$。

由于 $b-1=4$ 而和前一行的 $a+1=4$ 重复。

故 $b-2$ 只能取等于 6，得到 $b-1=7$，$b+1=9$，$b+2=10$。

第三行，$c-3$ 最小，同上道理，$c-3$ 只能取等于 11，得到 $c-1=13$，$c+1=15$，$c+3=17$。

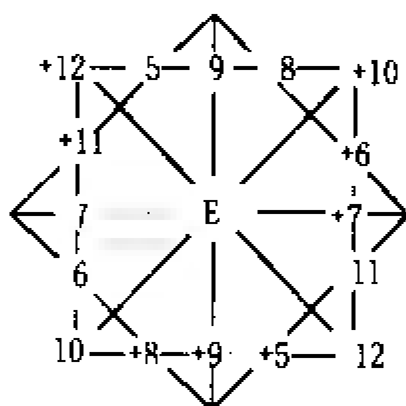
第四行 $d-3$ 最小，同上道理，$d-3$ 只能取等于 18，得到 $d-2=19$，$d+2=23$，$d+3=24$，于是可填成图解 141，每行四数之和等于 46。



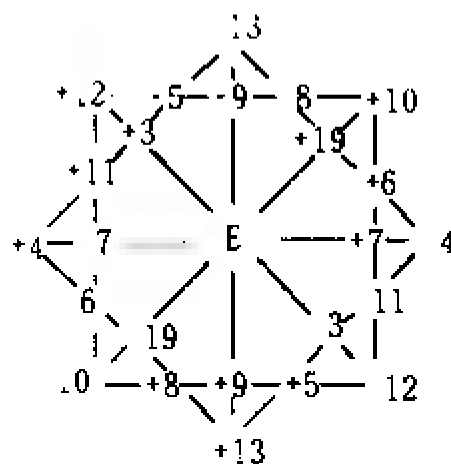
图解 141

21. 利用第二节的图 $A7$，仿上题，先填八角形图中一个四方形，如图解 142。

这时，图解 142 的左斜行二数之和为 6，再选二数之和为 6 即可，选得 13，+3，+4，【也可选+13，15，4 其余类推】同时反其正负号与其对应平行的另一斜行也写上相同数字，如图解 143。

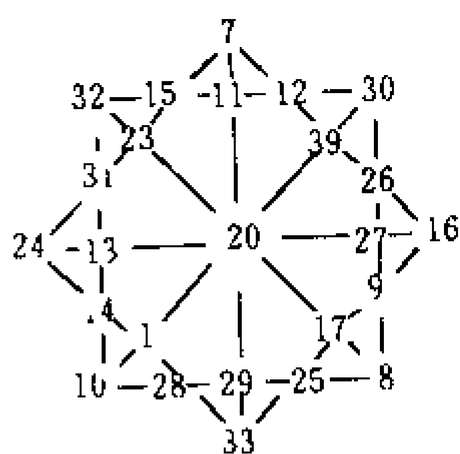


图解 142



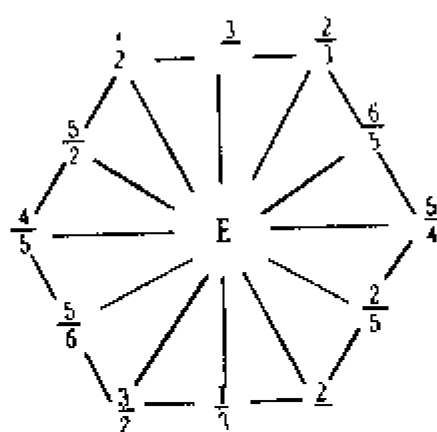
图解 143

其中 $E \geqslant 20$，如取 $E = 20$，可填成图解 144，每行五数之和＝100。



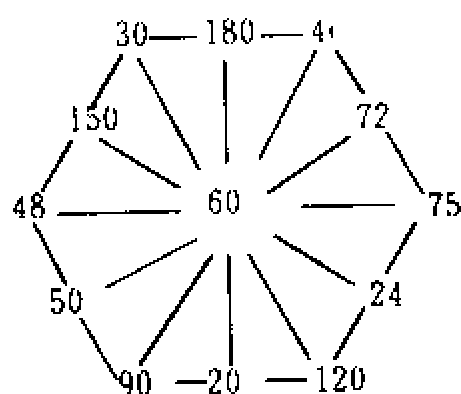
图解 144

第十五章



图解 145

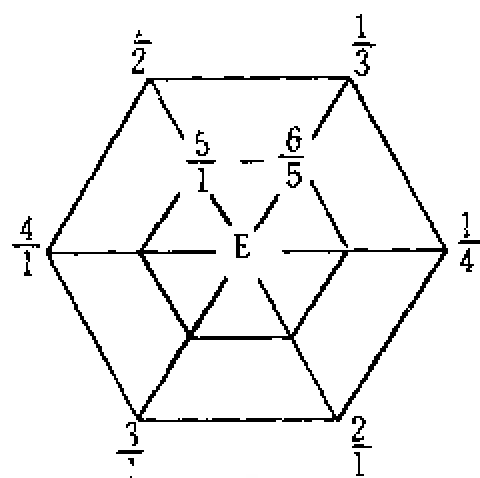
图解145的填数法：做每行3个分数之积等于1，只要注意选取的分数不重复，这个计算比较容易，如图解145。



图解 146

将图解145中的分数通分，即求出分母的最小公倍，就是E的最小值，将E乘各分数，得到图解146，每行三数之积 $= 60^3 = 216000$。

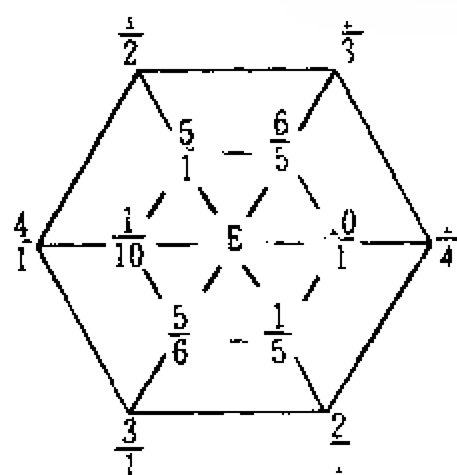
图解147的填数法是：任取3



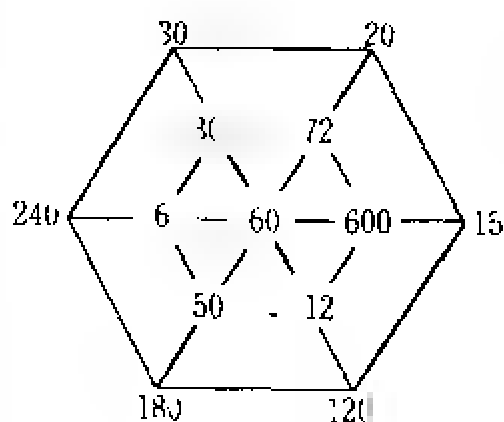
图解147

个不同分数做为相连的3个顶角数，并将数字颠倒后母子填入对称角，比如选 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，将其中相邻二数之积分解等于不同的二个因数。

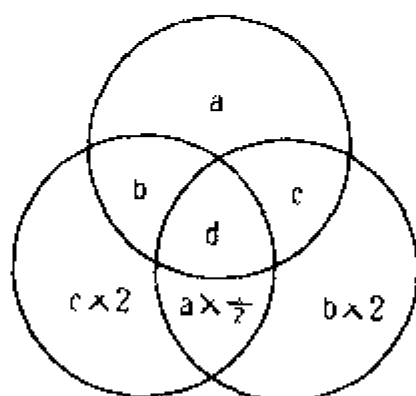
再选其中二个颠倒母子后填入这个大三角形边上的二点，使大三角形边上4点之积等于1，即 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$，而 $\frac{1}{6}=\frac{1}{5}\times\frac{5}{6}=\frac{1}{7}\times\frac{7}{6}=\frac{4}{3}\times\frac{1}{8}$…… 选取 $\frac{1}{5}\times\frac{5}{6}$，颠倒后填如图解147，这时在图解147
中已填上数字的大三角邻边另一个三角形的边上已有三数：因 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{6}{5}\times(\quad)=1$，计算填空数为 $\frac{10}{1}$，故将它填入这三角形边上剩下的一数，最后图中剩下的其他三数，只要将各自的数颠倒后填入对称格就成了，如图解148。



图解148



图解149



图解150

将图解148中各分数通分，得到 $E = 60$，将60乘各分数，得到图解149，图中：外顶六角、内顶六角六数之积等于 $60^6 = 46656000000$，每个大三角边上5数、每行5数之积等于

$60^5 = 777600000$。

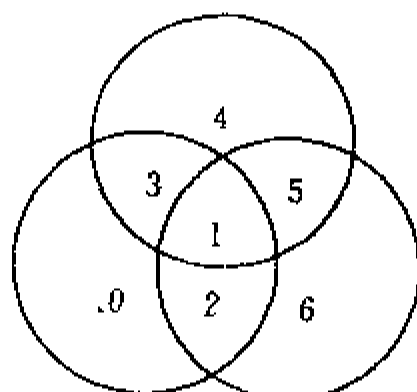
图解150的填数法：先作图，使每圆都有 a、b、c、d 4数，每圆连乘分数都等于1，如图解150，然后计算图中各数，取每圆最小值，由小到大，取：$d = 1$，因为 d 是三圆共有数，其次为 b、c、$\frac{1}{2}a$ 这三数每数都是二圆的共有数。

故取 $a = 4$，$\frac{1}{2}a = 2$，

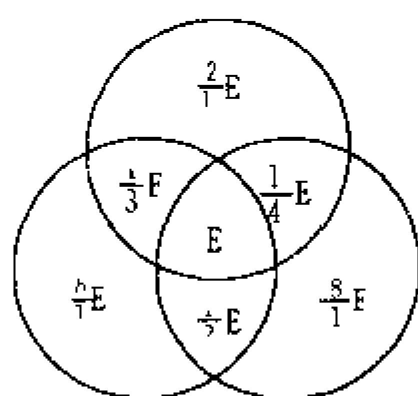
$b = 3$，$2b = 6$，

$c = 5$，$2c = 10$，

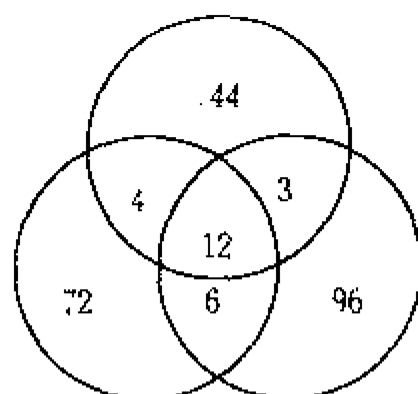
得到图解151，每圆4数之积 $= 60$，也可作每圆等于 E^4，如图解152和图解153。每圆4数之积 $= 12^4 = 20736$，通分得 $E = 12$【或12的倍数】



图解151

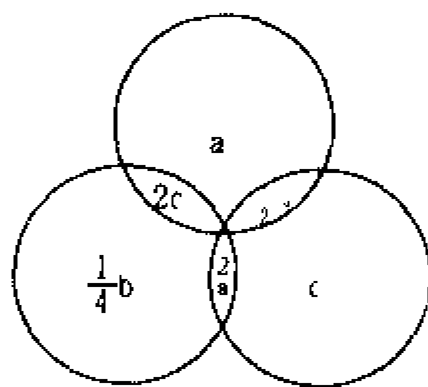


图解152

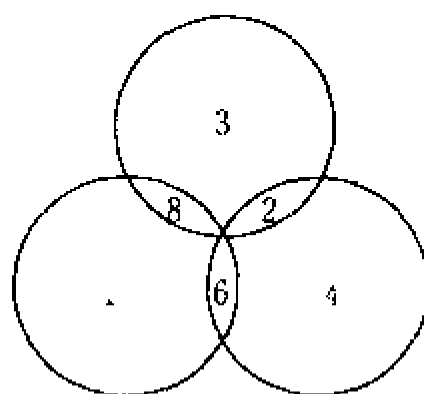


图解153

图解154的填数法，使每圆都有 a、b、c 三数并令 $\frac{1}{4}b = 1$，$\frac{1}{2}b = 2$，$a = 3$，$2a = 6$，$c = 4$，$2c = 8$，故得到图解155，每圆3数之积等于48。

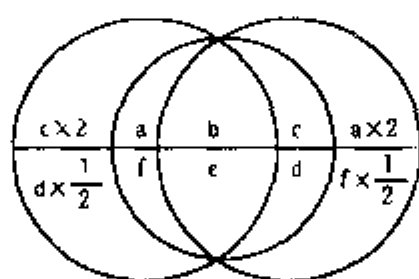


图解154

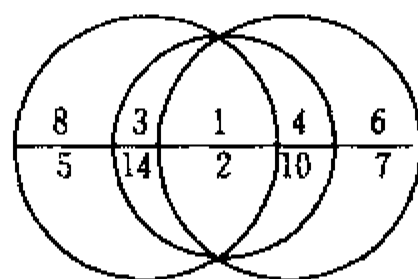


图解155

图解156的填数法也同以上，计算各数值取从小到大：$b = 1$，$e = 2$，$a = 3$，$2a = 6$，$c = 4$，$2c = 8$，$\frac{1}{2}d = 5$，$d = 10$，$\frac{1}{2}f = 7$，$f = 14$，每圆3数之积 = 3360。（即图解157）



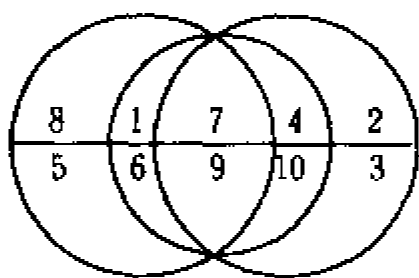
图解156



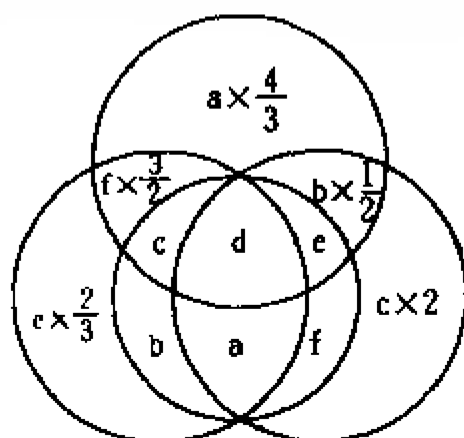
图解157

如要求用1至10的连续数填图，则由计算可令：

$a = 1$，$2a = 2$，$\frac{1}{2}f = 3$，$f = 6$，$c = 4$，$2c = 8$，$\frac{1}{2}d = 5$，$d = 10$，$b = 7$，$e = 9$，可得到图解158，每圆6数之积 = 15120。

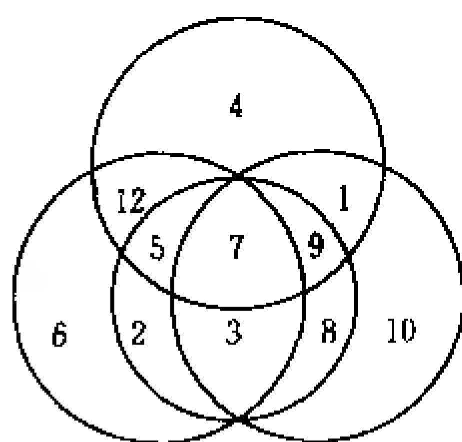


图解158



图解159

图解159的填数法：使每圆都有a、b、c、d、e、f、g6数，中间小圆6数都是乘1，其他各圆适当取乘数，并满足每圆乘数连乘等于1，然后也仿前题一样，计算各数值：



图解160

$a=3$，$\frac{4}{3}a=4$，$b=2$，$\frac{1}{2}b=1$，$c=5$，$2c=10$，$d=7$，$e=9$，$\frac{2}{3}e=6$，$f=8$，$\frac{3}{2}f=12$，如图解160，每圆6数之积＝15120。

以上四圈图能否取11个连续数填数呢？可列表推算如下：

行数	a	$\frac{4}{3}a$	b	$\frac{1}{2}b$	c	$2c$	d	e	$\frac{2}{3}e$	f	$\frac{3}{2}f$	
一、	3	4	10	5				9	6	8	12	
二、	6	8						3	2	10	15	
三、	9	12						3	2	4	6	

从上表第一行看，取a的最小值等于3，则只能取$e=9$【因为如果取$e=6$，则$\frac{2}{3}e=4$而和$\frac{4}{3}a=4$相重】而f的最小值只能取$f=8$【因为如果$f=2$，则$\frac{3}{2}f=3$而和$a=3$相重】$\frac{3}{2}f=12$，这时，11个连续数中最大数等于12，则最小数等于2，于是只能取$b=10$，$\frac{1}{2}b=5$，但由2至12的连续数剩下的2、7、11三数却不符合等于c和$\frac{1}{2}c$的要求。

再从第二行看，取$a=6$，$\frac{4}{3}a=8$，又取$e=3$，$\frac{2}{3}e=2$，则只能取$f=10$，$\frac{3}{2}f=15$，但最大数等于15时，则最小数必是5而和$\frac{2}{3}f=2$是最小数发生矛盾。同理也不能取$e=15$，$\frac{2}{3}e=10$，因为又要取$f=12$，$\frac{3}{2}f=18$，而最大数是18时，则最小数是8而和$a=6$

是最小数发生矛盾。

又从第三行看，按第二行的情况，只能取 $b = 10$，$\frac{1}{2}b = 5$，这样，在 2 至 12 的连续数剩下 7、8、11 三数不符合等于 c、$\frac{1}{2}c$ 的要求，如改为 $e = 6$，$\frac{2}{3}e = 4$，则 $f = 2$，$\frac{3}{2}f = 3$，得到重复同样情况。

从表和以上推算易知，取 a、$\frac{4}{3}a$、b、$\frac{1}{2}b$、c、$2c$、d、e、$\frac{2}{3}e$、f、$\frac{3}{2}f$ 是不能凑成 1 至 11 的连续数的，同理也不能凑成任 11 个连续数。如果将它们改为 a、$\frac{1}{2}a$、b、…… 或其他的数，用同样方法，也可推证都不能凑成 11 个连续数，请读者自己去推算。

故这个四圈图，用 11 个连续数是不能填成每圈 6 数之积都相等的。

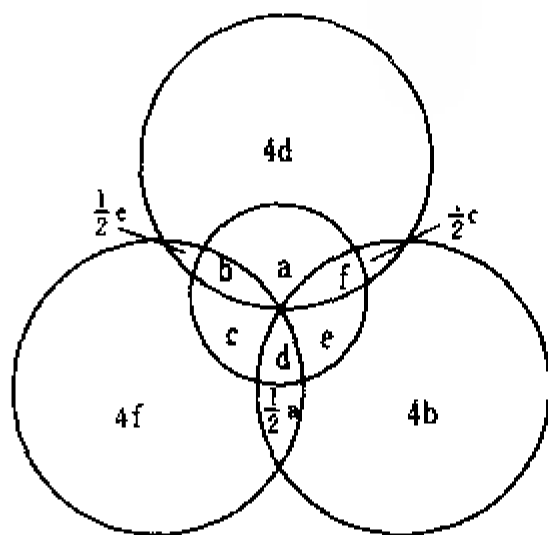
图解 161 的填数法也和以上相同，为了取每圆 6 数之积的较小值，可选二数之间比例最大的取最小值，如：

$f = 1$　　$4f = 4$　　$d = 2$　　$4d = 8$

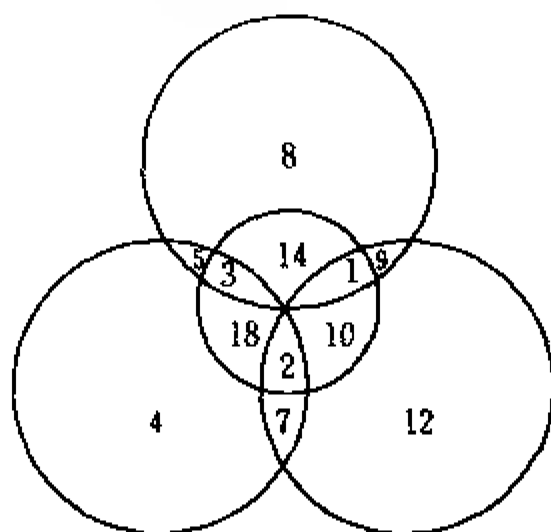
$b = 3$　　$4b = 12$　　$e = 10$　　$\frac{1}{2}e = 5$

$a = 14$　　$\frac{1}{2}a = 7$　　$c = 18$　　$\frac{1}{2}c = 9$

故可填成图解 162，每圆 6 数之积为 15120



图解161



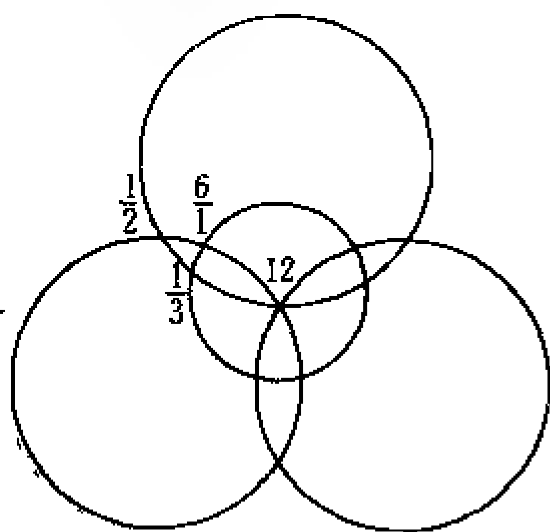
图解162

如果将上图改为按交叉点填数。

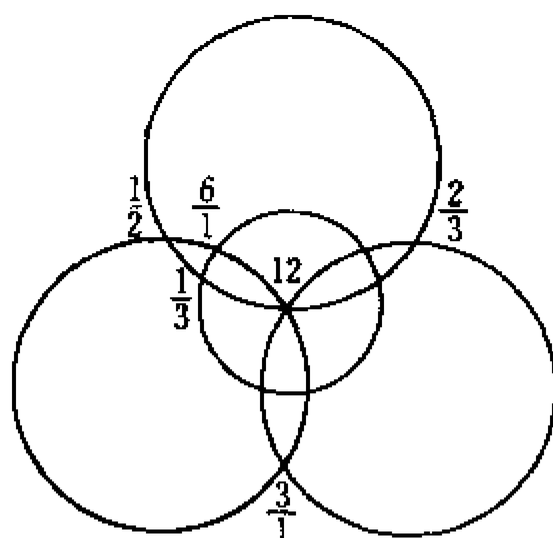
可以在“方形图中心数字用表”中，选取 12 为图的中心数，并将它的“分数”，选三数为一组，每组三个分数之积相等，即：

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{6}{1};\qquad \frac{2}{1},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4};\qquad \frac{3}{1},\ \frac{1}{4},\ \frac{4}{3}。$$

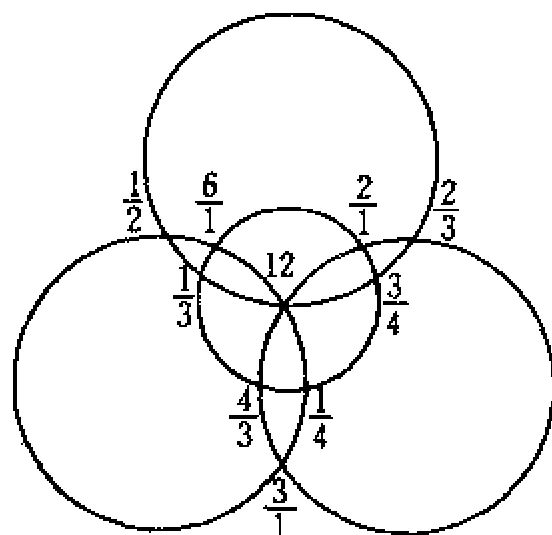
仿前面(16)题解的方法：先填图解 163，再填图解 164，又再填图解 165，最后以 12 以乘图解 165 中的分数，可得图解 166，每圈 7 数之积 $=12^7$。



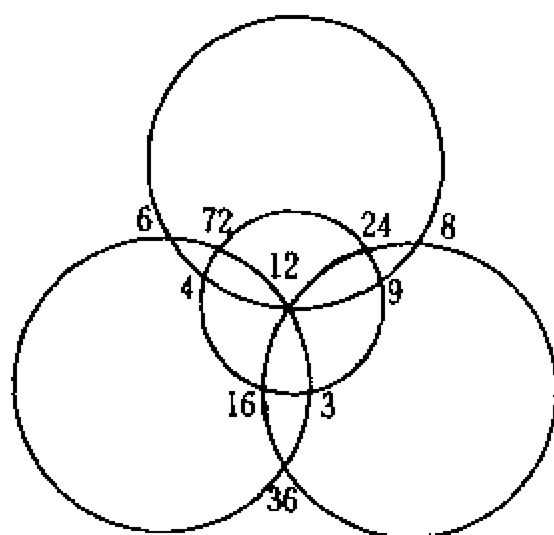
图解163



图解164



图解165

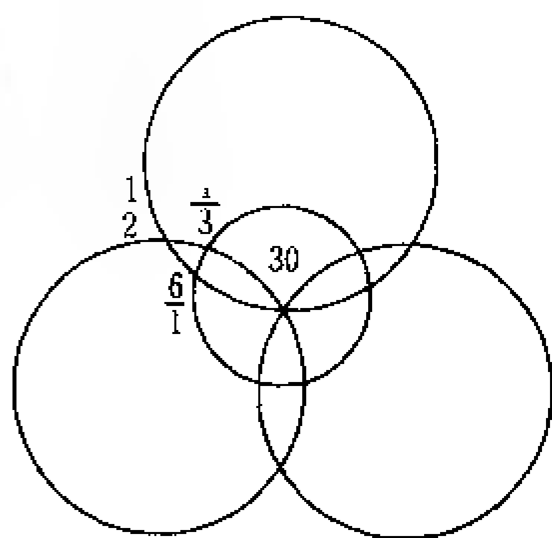


图解166

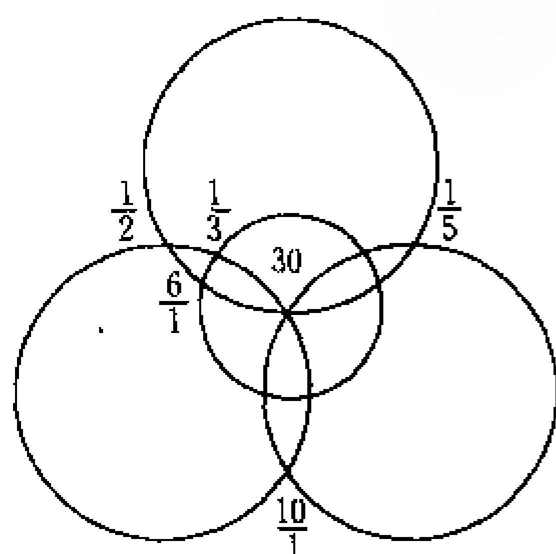
也可以选中心数字为 30，将其“分数”选出三组：

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{6}{1}$　$\frac{1}{5}, \frac{5}{2}, \frac{2}{1}$　$\frac{3}{5}, \frac{1}{6}, \frac{10}{1}$。

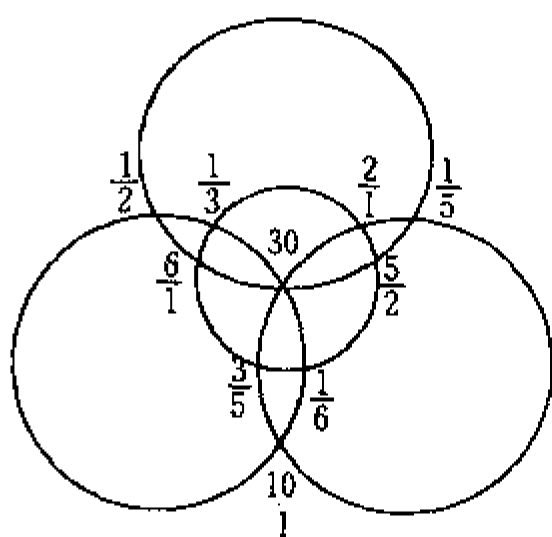
仿同样方法：先填图解 167，再填图解 168，又再填图解 169，最后以 30 乘图解 169 中的分数，可得图解 170，每圈 7 数之积 = 30^7。



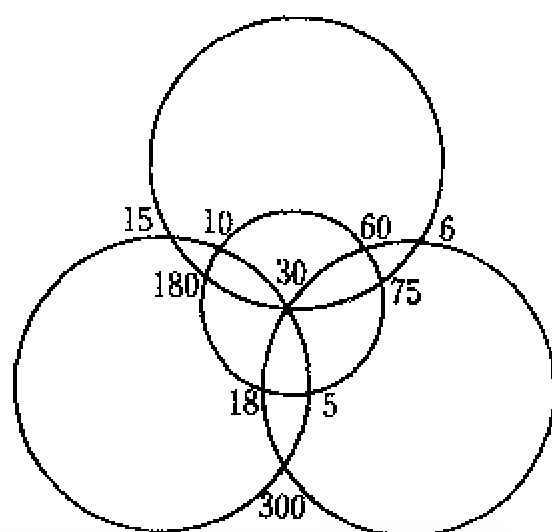
图解167



图解168



图解169



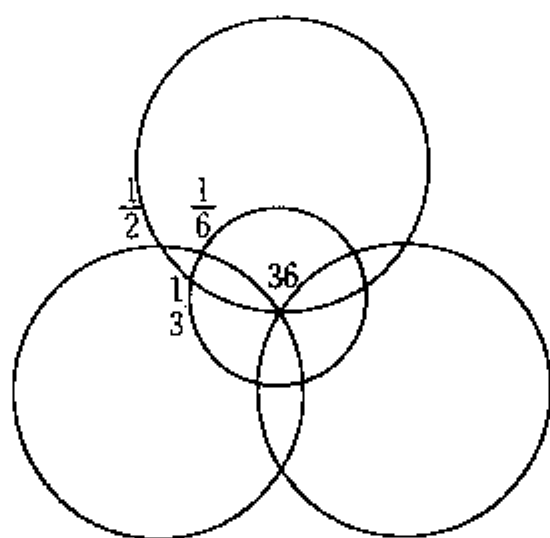
图解170

也可以选中心数字为 36，选其“分数”每三数为一组，每组三数之积都等于 $\frac{1}{36}$【只要每组之积都相等就可以，以上三例是每组

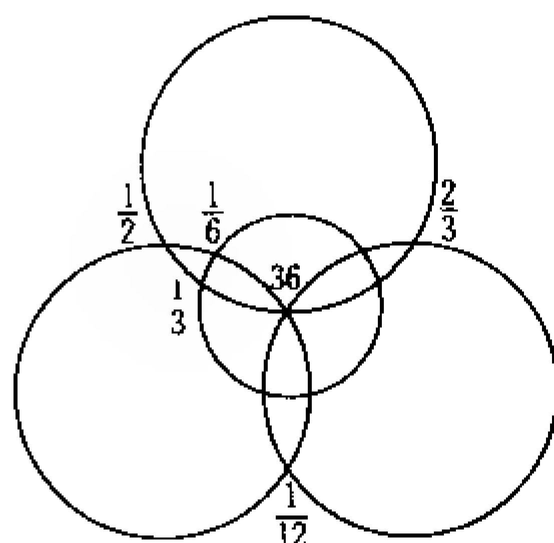
三数之积等于1】即：

$$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6}\qquad \frac{1}{18},\frac{3}{4},\frac{2}{3}\qquad \frac{1}{12},\frac{1}{4},\frac{4}{3}$$

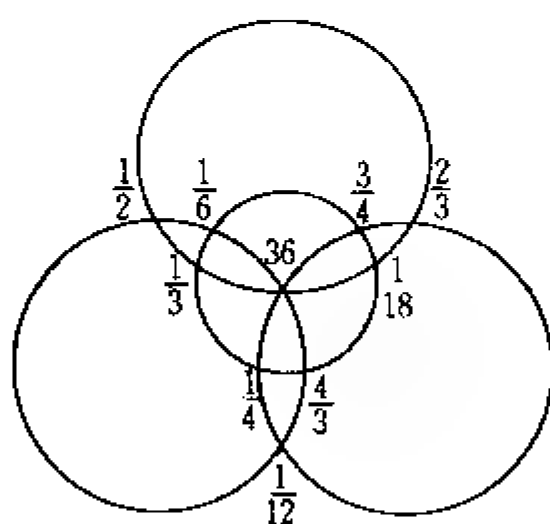
也仿同样方法：先填图解 171，再填图解 172，又再填图解 173，最后以 36 乘图解 173 中的分数，可得图解 174，每圈 7 数之积 $=36^5$。



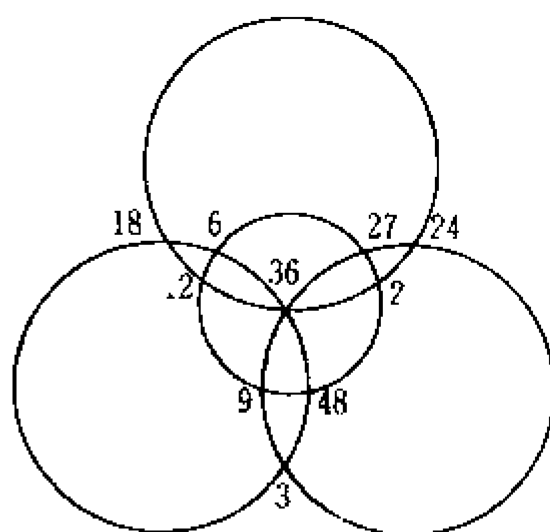
图解171



图解172



图解173



图解174

……

五角星图的填数法，利用第十五章第二节25格图的例一，即图 $B21$，将它的一、二横行的分数分别填入五角星图的顶角和内交叉五点，如图解175，然后立式填空：

$$\frac{4}{9}\times\frac{3}{4}\times(\quad)\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{18}=1$$

得到填空数字为$\frac{162}{1}$

$$\frac{4}{9}\times\frac{4}{3}\times(\quad)\times\frac{2}{1}\times\frac{1}{4}=1$$

得到填空数为$\frac{27}{8}$

$$\frac{9}{2}\times\frac{3}{4}\times(\quad)\times\frac{4}{3}\times\frac{36}{1}=1$$

得到填空数为$\frac{1}{162}$

$$\frac{9}{2}\times\frac{1}{3}\times(\quad)\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{4}=1$$

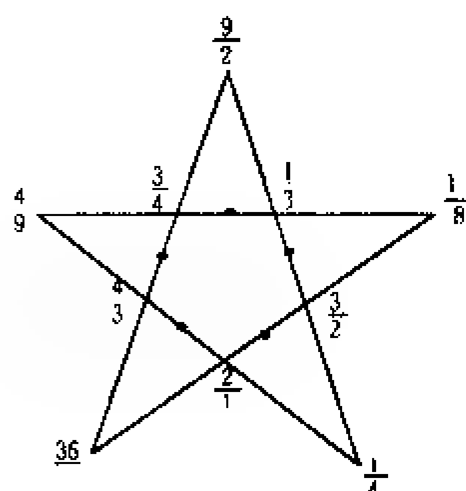
得到填空数为$\frac{16}{9}$

$$\frac{1}{18}\times\frac{3}{2}\times(\quad)\times\frac{2}{1}\times\frac{36}{1}=1$$

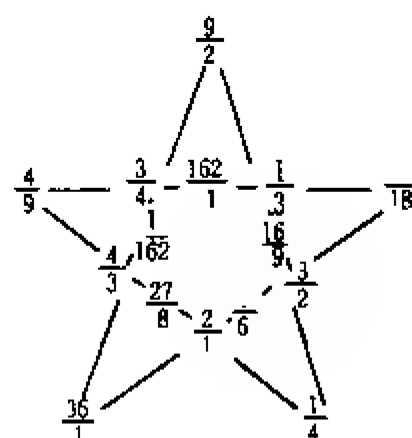
得到填空数为$\frac{1}{6}$，

于是得到图解176

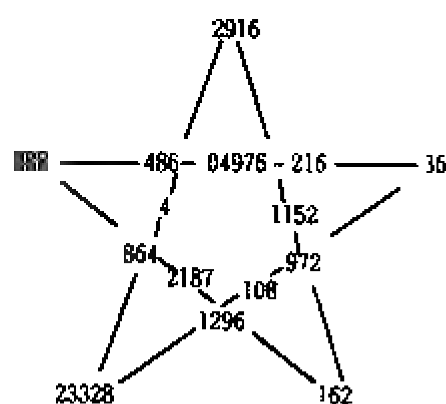
再将图解176中的分数通分，求出最小公倍得到648，并以648乘各分数，就可得到图解177，每行5数，五个顶角数，五个内交叉点，每行中间五点数字之积都等于648^5。



图解175

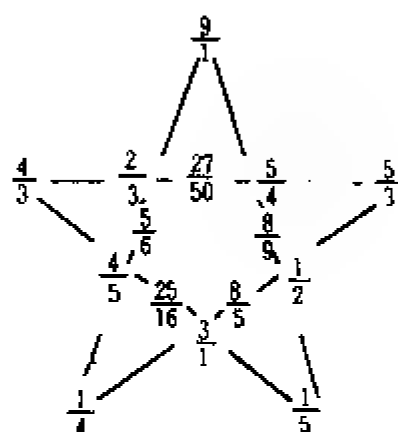


图解176

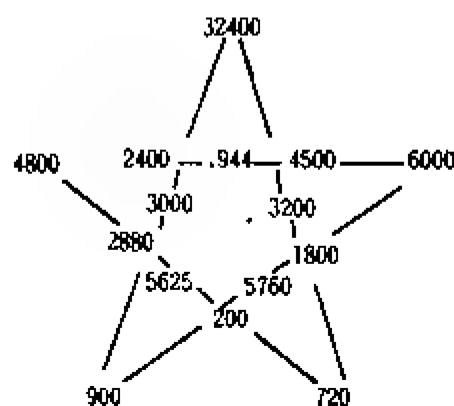


图解177

再利用第十五章第二节 25 格图例二,即图 $B29$,用同样方法可得图解 178,通分得 3600,以 3600 乘各数可得图解 179。



图解178

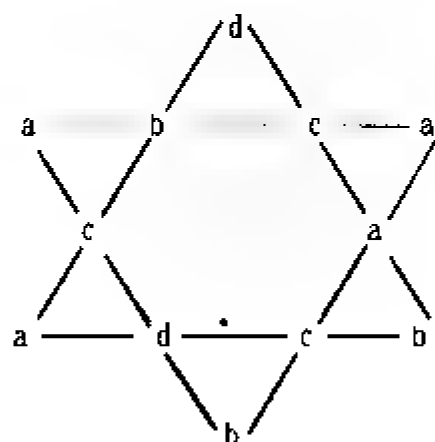


图解179

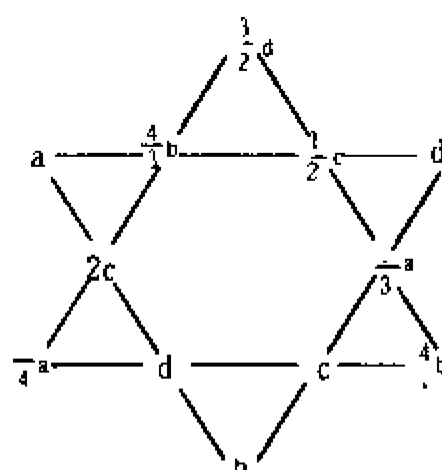
图解 179 每行 5 数、5 个顶角数、5 个内交叉点、每行中间 5 点之积都等于 3600^5。

图解 180 即六角星图的填数法：仿第十四章作法，使从每行看，都有 a、b、c、d4 数。

再将第十五章（五）节，任取一图例都可以，比如取例一图，图 $B40$，按顺序取上横行和左直行的分数，分别填入六角星图的左、右外斜行，如图：

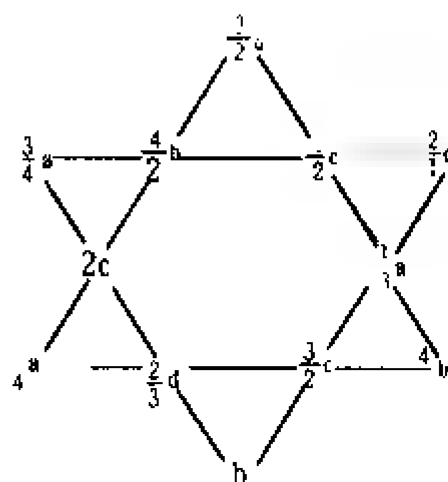


图解180



图解181

这时六角星图【即图解 181】的上横行已有 $\frac{4}{3}$ 和 $\frac{1}{2}$，其二角所需要的数字，正是 16 格图中的“$\frac{3}{4}$，$\frac{1}{2}$”和“$\frac{3}{1}$、$\frac{1}{2}$”二对，于是先把“$\frac{3}{4}$，$\frac{2}{1}$ 分别填在六角



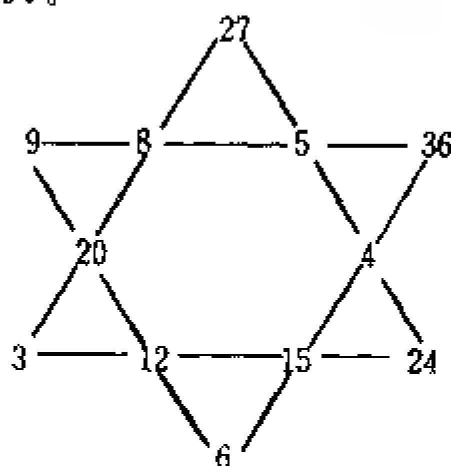
图解182

星图上横行的左右二角进行尝试计算，又因为下横行左右二数是互为颠倒的分数，得知这行的中间二数也必是互为颠倒的分数，因左内斜行有：$\frac{3}{4}\times 2=\frac{3}{2}$，又右内斜行有：$\frac{2}{1}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，得知这$\frac{3}{2}$和$\frac{2}{3}$刚好是互为颠倒的分数，故可填入下横行的中间二数，于是六角星图下角因为是左右内斜行的共有角，只须乘1就可以。【如果这个尝试计算不符合要求，则再换用“$\frac{3}{1}$，$\frac{1}{2}$”填在上横行二角，或交换其位置，直至符合要求为止】如图解182。

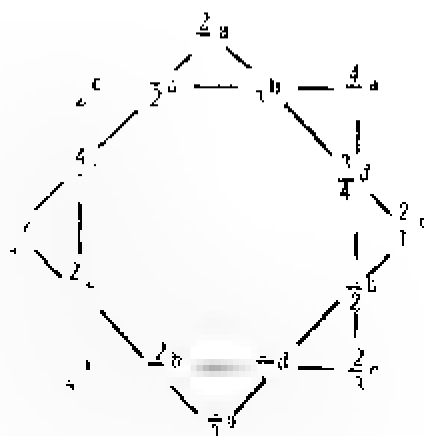
再计算各值：

$\frac{1}{3}a$、$\frac{1}{4}a$、$\frac{3}{4}a$通分为12，故：

$\frac{1}{3}a=4$，$\frac{1}{4}a=3$，$\frac{3}{4}a=9$；$\frac{4}{3}b$、$4b$、b，通分为3，为了不和a重复，故取$b=6$，$\frac{4}{3}b=8$，$4b=24$；$\frac{1}{2}c$、$\frac{3}{2}c$、$2c$，通分为2，为了不和a、b之值重复，故取：$\frac{1}{2}c=5$，$\frac{3}{2}c=15$，$2c=20$；$\frac{3}{2}d$、$\frac{2}{3}d$、$2d$，通分为6。为了不和a、b、c各值相重，故取：$\frac{3}{2}d=27$，$\frac{2}{3}d=12$，$2d=36$。最后得到图解183，每行4数之积12960。



图解183


图解184

八角图【即图解 184】的填法：将第十五章（五）节 16 格图的例一图即图 $B40$ 四周的分数，按顺序填入八角图正四方形四周格．这时八角图左外斜行的 $\frac{4}{3}$ 和 $\frac{1}{2}$，在 16 格图中它的对称数是 $\frac{3}{4}$ 和 $\frac{2}{1}$．【也可以“$\frac{3}{1}$ 和 $\frac{1}{2}$”，因为 $\frac{3}{1}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ 而 $\frac{3}{4}\times\frac{2}{1}=\frac{3}{2}$，其积同为 $\frac{3}{2}$】因此先将“$\frac{3}{4}$ 和 $\frac{2}{1}$”分别填在八角图左外斜行的二端，进行尝试计算，如不成就将这二个分数交换位置，再不成就用“$\frac{3}{1}$，$\frac{1}{2}$”。经计算得知取 $\frac{3}{4}$ 和 $\frac{2}{1}$ 二个分数填左外斜行的二端是符合的，如图解 184，剩下八角图的右角和下底角，立式填空可得：

$\frac{3}{4}\times\frac{2}{1}\times\frac{2}{1}\times(\quad)=1$，得到填空数为 $\frac{1}{3}$。

$\frac{2}{1}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times(\quad)=1$ 得到填空数为 $\frac{2}{1}$。

仿上法计算 a、b、c、d 各数值

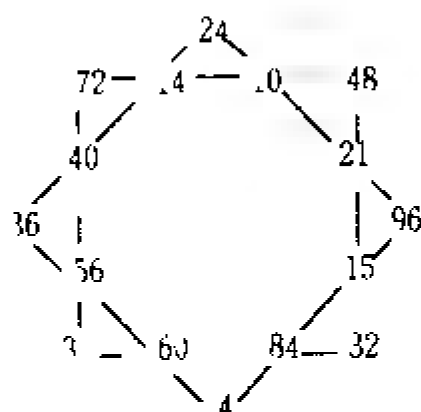
取 $a=12$，$\frac{2}{1}a=24$，$\frac{1}{3}a=4$，$\frac{1}{4}a=3$，$\frac{4}{1}a=48$，

取 $b=30$，$\frac{4}{3}b=40$，$\frac{2}{1}b=60$，$\frac{1}{2}b=15$，$\frac{1}{3}b=10$，

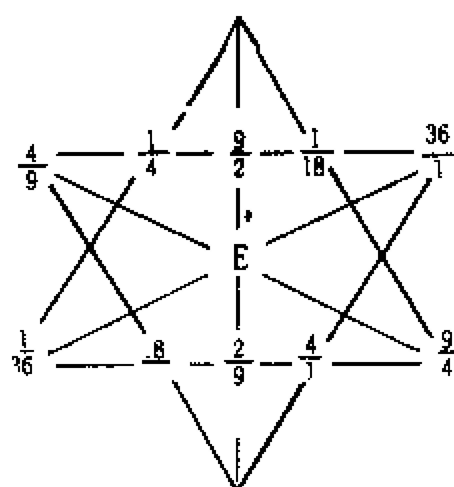
取 $c=48$，$\frac{3}{2}c=72$，$\frac{2}{3}c=32$，$\frac{3}{4}c=36$，$\frac{2}{1}c=96$

取 $d=28$，$\frac{1}{2}d=14$，$\frac{2}{1}d=56$，$\frac{3}{1}d=84$，$\frac{3}{4}d=21$。得到图解 185，每行 4 数之积 $=483840$

六角图（图解 186）的填数法。取第十五章（二）节 25 格的例图【图 $B24$】的上横行数字按顺序填入六角图的上横行，再将这些数倒过来填在下横行．如图解 186，



图解185

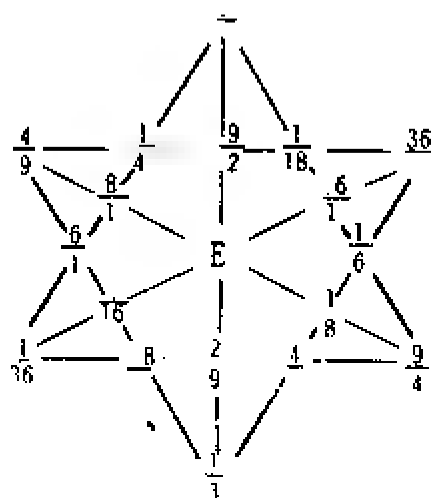


图解186

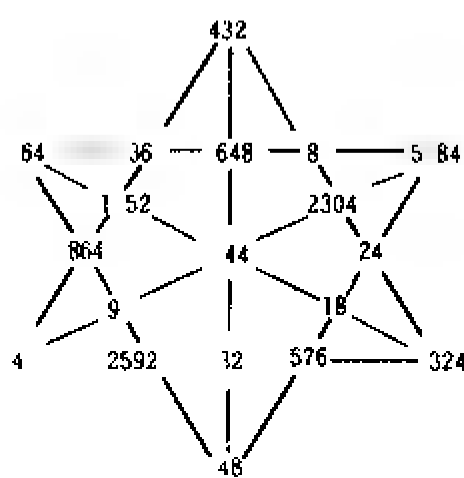
这时，六角图的左外斜行已有 $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{36}$，因 $\frac{1}{4}\times\frac{1}{36}=\frac{1}{144}$，那么，再选三数连乘等于 $\frac{144}{1}$，【只有这样，每行 5 个分数之积才等于 1】，选得：

$$\frac{144}{1}=\frac{2}{1}\times\frac{9}{1}\times\frac{8}{1}=\frac{2}{1}\times\frac{3}{1}\times\frac{24}{1}=\frac{6}{1}\times\frac{8}{1}\times\frac{3}{1}=\cdots\cdots$$

将以上三个分数轮流或交换位置填在左外斜行的空点，分别进行尝试计算，最后得到 $\frac{3}{1}$，$\frac{8}{1}$，$\frac{6}{1}$ 符合要求，即图解 187，再将各分数通分，求出 E【中心数】，以 E 乘各分数得到图解 188．每行 5 数之积 $=144^5=61917364224$。



图解187



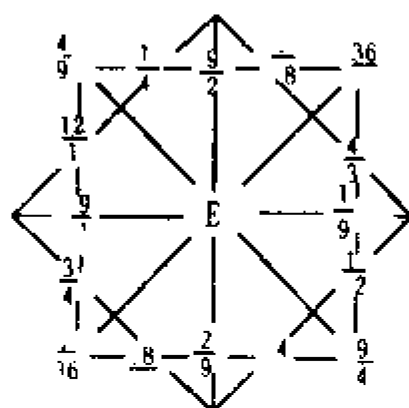
图解188

八角图【图解189】的填数法：取第十五章(二)节25格图的例一图，图$B24$的外层格分数按次序填入八角图的正方形的四周，但中间二对要交换位置，如图解189，这时图中的左外斜行已有$\frac{12}{1}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{1}$，故选三个分数乘积等于$\frac{1}{3}$即可：如

$$\frac{1}{3}=\frac{5}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\times\frac{6}{5}\times\frac{10}{3}=\frac{1}{18}\times\frac{18}{5}\times\frac{5}{3}=$$

……【为方便起见，可从本书末尾的“中心数字表”中具有12个“分数”以上的整数中选取】

选得$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{5}{3}$三个分数填成图解190。



图解189

将图解190中的分数通分得到$E=180$，以180乘其分数得到图解191，每行5数之积$=180^5=188956800000$。

图解190

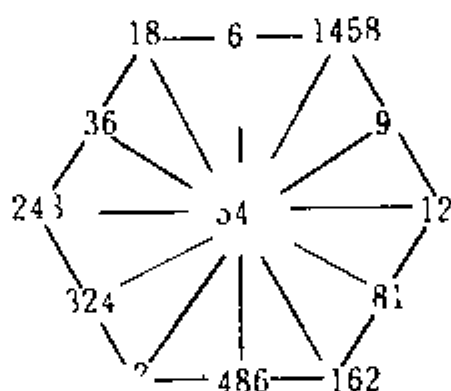
图解191

2　本题解，除个别较难，需要详细计算和解释者外，其余的只将图的结果填写出来，这样可以使读者凭自己的理解程度去解答，则收获更大。个别填空图，一例有几个结果，那是正常的，读者勿以为自己演算出来的结果与题解答案不同，而产生怀疑。

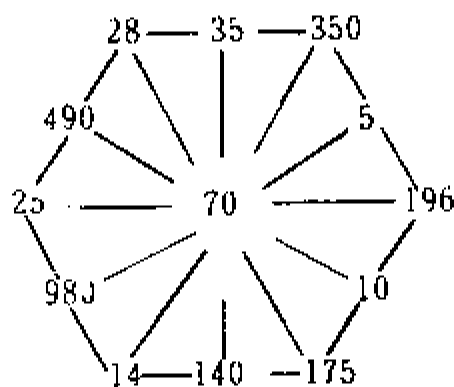
图B题1

图B题10

图 B 题 1【即图 B 题 1 的答案，以后如写图 B 题 ×，即指图 B 题 × 的答案，或指原图 B 题 × 的原图】



图B题11

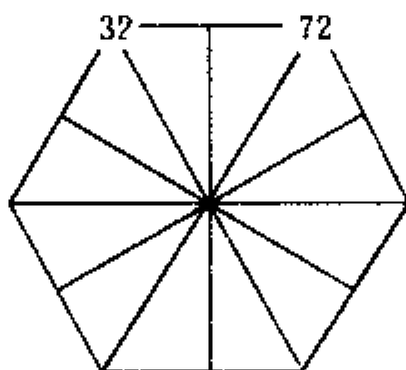


图B题12

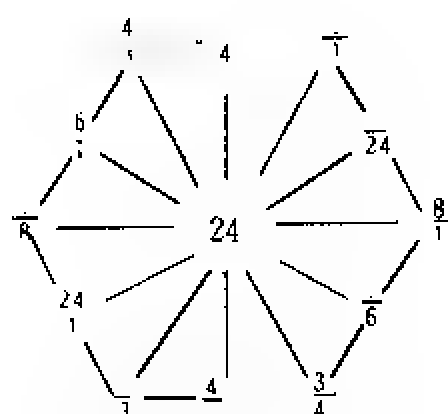
图 B 题 13 的上横行二角已规定数字，现将填法提示如下：

先将这二数的公因数或公因数的倍数选作中心数，但这数必须具有 6 个以上“分数”【可查“中心数字表”】将图中规定的二数，各除以中心数，得出它的分数【在所选的中心数字的“分数”中，必须要有这二个分数】另作图写上这二个分数，然后按前面所讲的方法去填。

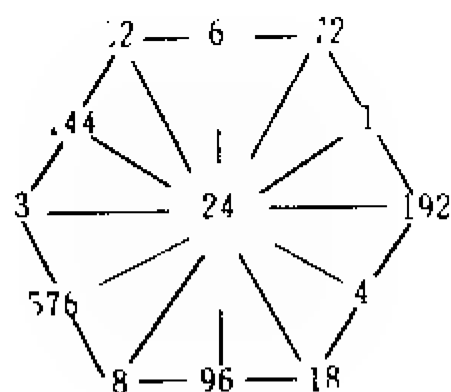
现选这二数的公因数的倍数 24，查表 24 有 10 个分数，故适合要求，因 $\frac{32}{24}$ 得到 $\frac{4}{3}$，$\frac{72}{24}$ 得到 $\frac{3}{1}$，故将这二个分数填在图上，仿前法可得到图解 193，再填成图解 194。每行 3 数之积 $= 24^3 = 13824$。



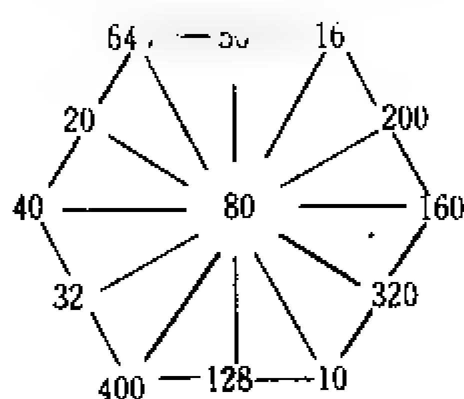
图B题13



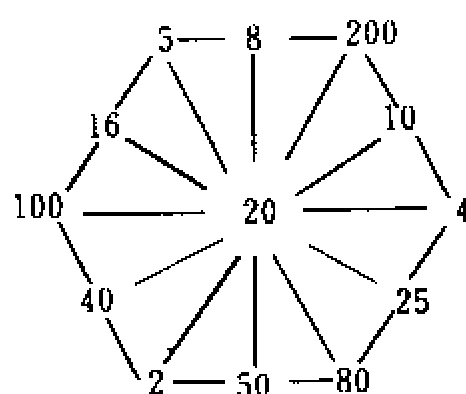
图解193



图解194



图B题14



图B题15

27	4	54
36	18	9
6	81	12

图 B 题 2

10	200	4
8	20	50
100	2	40

图 B 题 3

15	675	9
27	45	75
225	3	135

图 B 题 4

35	700	14
28	70	175
350	7	140

图 B 题 5

42	504	28
56	84	126
252	14	168

图 B 题 6

13	8281	7
49	91	169
1183	1	637

图 B 题 7

51	68	306
612	102	17
34	153	204

图 *B* 题 8

54	36	648
1296	108	9
18	324	216

图 *B* 题 9

9	4	162
324	18	1
2	81	36

图 *B* 题 20

图 *B* 题 22 的右角已规定数字，其填法提示是：因 5 是素数，故先取 5 的倍数为 9 格图的中心数，并查“中心数字表”中 5 的倍数，条件是这数需具有 4 个或 4 个以上的“分数”。将 5 除以中心数字，所得到的分数填入图的右角，然后再按上面所讲的方法去作就成了，即：取 10 为中心数，可填成图解 195 和图解 196。

		5

图 *B* 解 22

$\frac{1}{5}$	$\frac{10}{1}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{5}{2}$	10	$\frac{2}{5}$
$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{5}{1}$

图解 195

2	100	5
25	10	4
20	1	50

图解 196

		1

图解 197

但如果要求将“1”填在 9 格图的角格上（如图解 197），就不成了，这也和要求每行三数之和相等将“1”填在角格上是不成的道理一样。【见第十四章第一节】例如取 12 为中心数字，12 有 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{12}$ 共 7 个分数，将其中 6 个分数，逐一轮换填图，则

不论是如何填法都不成，否则，计算后，必有一个"分数"不是12的"分数"或出现分数重复，这和中心数字12发生矛盾。但如果将"1"填在上横行的中间格就成了，可填成图解198和图解199。

$\frac{4}{1}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{1}$
$\frac{3}{4}$	12	$\frac{4}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{12}{1}$	$\frac{1}{4}$



48	1	36
9	12	16
4	144	3

图解 198　　　　图解 199

又如取中心数字为30，30有$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{5}{6}$，$\frac{1}{10}$，$\frac{3}{10}$，$\frac{1}{15}$，$\frac{2}{15}$，$\frac{1}{30}$共13个分数，仿以上方法，如将"1"填在角格上，计算后，必有一个分数不是30的分数或出现分数重复，而和中心数30发生矛盾。但如果将"1"填入上横行的中间格，就可填成图解200和图解201。

$\frac{5}{1}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{6}{1}$
$\frac{6}{5}$	30	$\frac{5}{6}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{30}{1}$	$\frac{1}{5}$



150	1	180
36	30	25
5	900	6

图解 200　　　　图解 201

		14
28		

图解 23

图 B 题 23 中规定二个数字，其填法提示是：

（1）选这二数的最大公因数或最大公因数的倍数为图的中心数字，并查表看这中心数字是否具有 4 个或 4 个以上的“分数”。

（2）将中心数字去除这二数，所得到的“分数”，看它是否属于这中心数的“分数”，如果是，就将它填入原格的位置，并将它颠倒母子后填入对称格，再求出这二行的另二个分数，同时也要看它是否这中心数的“分数”；否则要另选中心数字。

由此得知，方形图中如果规定数字时，则必需符合以上条件，所以它不是随便规定数字的。

现按以上提示填图：

选取 42 为图的中心数字，【56 虽是最大公因数的倍数，且有 10 个“分数”，但计算填图后得出另二个“分数”相重，故不取它，读者不妨试演一下】就可得到图解 202 和图解 203，每行 3 数之积＝74088

$\frac{1}{2}$	$\frac{6}{1}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{2}{3}$	42	$\frac{3}{2}$
$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{1}$

图解 202



21	252	14
28	42	63
126	7	84

图解 203

48	9	4
1	12	144
36	16	3

图 B 题 16

7	196	2
4	14	49
98	1	28

图 B 题 17

8	4	128
256	16	1
2	64	32

图 B 题 18

9	108	6
12	18	27
54	3	36

图 B 题 19

3	324	6
36	18	9
54	1	108

图 B 题 21

12	144	8
16	24	36
72	4	48

图 B 题 24

7

图 B 解 25

图 B 题 25 填空提示：

先做从每行看都有 a、b、c、d 四数，并确定 $a=7$；

因 7 是素数，所以图外层格凡是 a 的数值，所选的"分数"，其分母必为 7，或只取整数，并将 a 的对称数的分数同时写上去。

b	d	c	a
c	a	b	d
a	c	d	b
d	b	a	c

图解 204

如图解 204，其余 b、c、d 按第十五章第五节的方法，使每行分数相

乘，其积等于1，最后再计算各数值，得到图205和图206，每行4数之积 40320。

		1/2		7/4	
4/1	b	d	c	a	2/7
1/6	c	a	b	d	6/1
3/7	a	c	d	b	7/3
7/2	d	b	a	c	1/4
		2/1		4/7	

图 205

24	8	105	2
10	7	6	96
3	60	16	14
56	12	4	15

图 206

	1	27	

图 B 题 26

图 B 题 26 填空提示：

这种填空，比不受限制的填图较难，它的推算性很强，可比照第十五章第五节的道理，进行逆算，一般应注意：

先确定图中 $a = 1$，$b = 27$，凡用以乘图的外层格的 a、b 数，如果取为分数，则其分母只限于 a、b 各自的因数，如果 a、b 中有一个是奇素数【注：中间四数，如果有奇素数时，则只能有一个奇素数，否则不符合填16格图】则其乘数只限于整数，且 a、b 互相对称时的乘数，不取为 $a \times \frac{b}{a}$ 和 $b \times \frac{a}{b}$。按此提示，填法如下：

先确定 a 的乘数为 4、9、10，b 的乘数的分母为 9，3，如图解 207。

其次将图解 207 立式填空：

$\frac{(\ \ )}{3}\times\frac{3}{(\ \ )}\times\frac{1}{10}\times 4=1$【图解 207 的上横行】得到 $\frac{(5)}{3}$ 和 $\frac{3}{(2)}$

又 $\frac{5}{3}\times(\quad)\times 9\times\frac{1}{4}=1$【图解 207 的左直行】得到 $(\frac{4}{15})$

故得到图解 208。

最后将图解 208 计算各值，可得到图解 209，每行 4 数之积 = 12960。

上：$\frac{(\ \ )}{3}$　$\frac{3}{(\ \ )}$　$\frac{1}{10}$　4

b	d	c	a
c	a	b	d
a	c	d	b
d	b	a	c

左：(　)　9　右：(　)　$\frac{1}{9}$

下：$\frac{1}{4}$　$\frac{(\ \ )}{3}$　10　$\frac{3}{(\ \ )}$

图 207

上：无

b	d	c	a
c	a = ，b = 27		d
a	c	d	b
d	b	a	c

左：$\frac{4}{15}$　9

下：$\frac{1}{4}$　$\frac{2}{3}$　$\frac{10}{1}$　$\frac{3}{5}$

图 208

45	12	6	4
16	1	27	30
9	60	8	3
2	18	10	36

左：$\frac{15}{4}$　$\frac{1}{9}$

图解 209

15	14	6	4
24	1	10	21
2	18	28	5
7	20	3	12

图 *B* 题 27

20	36	3	11
33	1	18	40
9	30	44	2
4	22	10	27

图 *B* 题 28

8	60	5	6
120	3	4	10
1	40	30	12
15	2	24	20

图 *B* 题 29

	24	4	
	20	180	

图 *B* 题 30

图 *B* 题 30 填空提示：首先将 a、b、c、d 各自的因数列出来，其次选出各自的乘数，但要视其对称数是哪一数而决定，比如 a 的乘数，如取为分数，其分母是自己的因数，其分子则是对称数的因数，如取整数为乘数也要是对称数的因数。如果这样处理后，发现数字重复，则在同样条件下重新更换其乘数。故选得图解 210，最后通过计算得到图解 211。每行 4 数之积 $=345600$

		$\frac{1}{4}$	$\frac{8}{5}$	
$\frac{1}{2}$	b	d	c	a
$\frac{30}{1}$	c	$a=24$	$b=4$	d
$\frac{1}{3}$	a	c 20	d 180	b
$\frac{1}{5}$	d	b	a	c
		$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{8}$	

图解 210

$\frac{5}{1}$	2	45	32	120
$\frac{1}{30}$	600	24	4	6
$\frac{3}{1}$	8	20	180	12
$\frac{2}{1}$	36	16	15	40

图解 211

8	60	5	6

图 *B* 题 31

图 B 题 31 填空提示：首先将图中 4 数之积另行分解为 4 个因数，做为中间 a、b、c、d 之值，其次将原定的 4 数与中间 4 数各自计算出分数，然后按前例的提示选取其余各数的乘数，再进行尝试计算，如发现不符要求，则重新另选中心数。

因 $8\times 60\times 5\times 6=2^3\times 2^2\times 3\times 5^2\times 2\times 3$

$=2^6\times 3^2\times 5^2$

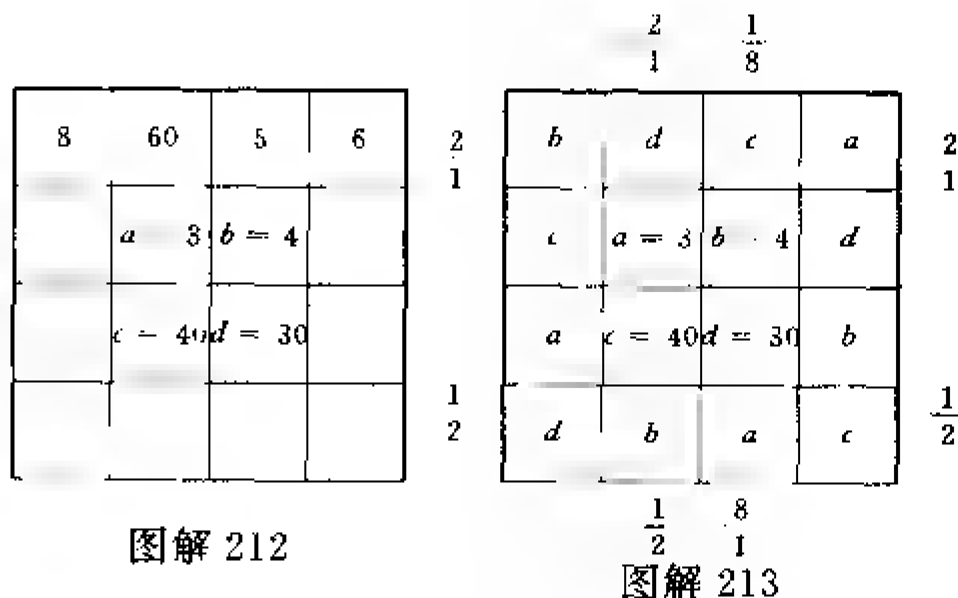
可取：$a=3$，$b=2^2=4$，$c=2^3\times 5=40$

$d=2\times 3\times 5=30$

……

但必须符合要求。因为不是任取 4 个因数为中心数都符合填数的。

经过筛选后得到：图解 212，图解 213。



图解 212　　图解 213

将图 213 左直行立式填空：

$\frac{2}{1}\times(\quad)\times(\quad)\times\frac{1}{2}=1$。

这时可按前例的提示，选取各个乘数填空。

得到 $\frac{2}{1}\times(\frac{3}{1})\times(\frac{1}{3})\times\frac{1}{2}=1$，

则以 $\frac{3}{1}$ 乘 c，因为 3 是 d 的因数，故符合要求，

以 $\frac{1}{3}$ 乘 a，因为3是自已的因数，可以取为乘数的分母，经计算后，得到下图解 214，最后得图解 215。每行 4 数之积 = 14400。

		$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{8}$	
$\frac{2}{1}$	b	d	c	a
$\frac{3}{1}$	c	a	b	d
$\frac{1}{3}$	a	c	d	b
$\frac{1}{2}$	d	b	a	c
		$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{1}$	

图解 214

$\frac{2}{1}$	8	60	5	6
$\frac{1}{3}$	120	3	4	10
$\frac{3}{1}$	1	40	30	12
$\frac{1}{2}$	15	2	24	20

图解 215

再举另一种填法【即筛法】

已知 16 格图上横行四个数字，求填其余各格的数字。由于我们已掌握了 16 格图横、直、斜行四数、中间四数、四个角数，它们之积都相等的规律，于是由计算又可得到：上二角和下横行的中间二数、下二角和上横行的中间二数、左边二角和右直行的中间二数、右边二角和左直行的中间二数、中间斜对二数和另一斜行二角之积都分别相等，这样就可运用第二章第一节中的"求 V 法"将每二数之积分为二个不同因数，都列出来，然后用筛法推算填入空格。现将下面的原图，并通过推算各图，都一一列出对照说明如下：

原图

4	21	5	12

4	21	5	12
1			105

图 1

4	21	5	12
3			35

图 2

4	21	5	12
	1	14	
	10	36	
3	24	2	35

图 3

4	21	5	12
	36	10	
	14	1	
3			35

图 4

4	21	5	12
	36	14	
	10	1	
3			35

图 5

4	21	5	12
	1	10	
	14	36	
3			35

图 6

4	21	5	12
	2	7	
	20	18	
3	6	8	35

图 7

4	21	5	12
	2	20	
	7	18	
3			35

图 8

4	21	5	12
	18	20	
	7	2	
3			35

图 9

4	21	5	12
	18	7	
	20	2	
3			35

图 10

4	21	5	12
	2	14	
	10	18	
3	4	12	35

图 11

4	21	5	12
	2	10	
	14	18	
3			35

图 12

4	21	5	12
	18	14	
	10	2	
3			35

图 13

4	21	5	12
	18	10	
	14	2	
3			35

图 14

4	21	5	12
35			3

图 15

4	21	5	12
	7	6	
	2	60	
35			3

图 16

4	21	5	12
	7	2	
	6	60	
35			3

图 17

4	21	5	12
	60	2	
	6	7	
35			3

图 18

4	21	5	12
	60	6	
	2	7	
35	2	24	3

图 19

4	21	5	12
	15	6	
	2	28	
35		6	3

图 20

4	21	5	12
	15	2	
	6	28	
35			3

图 21

4	21	5	12
	28	6	
	2	15	
35			3

图 22

4	21	5	12
	28	2	
	6	15	
35			3

图 23

4	21	5	12
7			15

图 24

4	21	5	12
	1	6	
3	10	84	2
7	24	2	15

图 25

4	21	5	12
	1	10	
	6	84	
7			15

图 26

4	21	5	12
	84	10	
	6	1	
7			15

图 27

4	21	5	12
	84	6	
	10	1	
7			15

图 28

4	21	5	12
	2	3	
	20	42	
7	8	6	15

图 29

4	21	5	12
	2	20	
	3	42	
7			15

图 30

4	21	5	12
	42	20	
	3	2	
7			15

图 31

4	21	5	12
	42	3	
	20	2	
7			15

图 32

4	21	5	12
	42	10	
	6	2	
7			15

图 33

4	21	5	12
	42	6	
	10	2	
7			15

图 34

4	21	5	12
	2	10	
	6	42	
7			15

图 35

4	21	5	12
	2	6	
	10	42	
7	12	4	15

图 36

4	21	5	12
	3	30	
	2	28	
7			15

图 37

4	21	5	12
	3	2	
	30	28	
7			15

图 38

4	21	5	12
	28	30	
	2	3	
7			15

图 39

4	21	5	12
	28	2	
	30	3	
7			15

图 40

4	21	5	12
	3	6	
	10	28	
7	8	6	15

图 41

4	21	5	12
	3	10	
	6	28	
7			15

图 42

4	21	5	12
	28	10	
	6	3	
7			15

图 43

4	21	5	12
	28	6	
	10	3	
7			15

图 44

4	21	5	12
	6	60	
	1	14	
7			15

图 45

4	21	5	12
	6	1	
	60	14	
7			15

图 46

4	21	5	12
	14	6	
	[illegible]	6	
7			15

图 47

4	21	5	12
	14	1	
	60	6	
7			15

图 48

4	21	5	12
	6	30	
	2	14	
7			15

图 49

4	21	5	12
	6	2	
	30	14	
7			15

图 50

4	21	5	12
	14	30	
	[illegible]	6	
7			15

图 51

4	21	5	12
	14	2	
	30	6	
7			15

图 52

4	21	5	12
	14	20	
	3	6	
7			15

图 53

4	21	5	12
	14	3	
	20	6	
7			15

图 54

4	21	5	12
	6	20	
	3	14	
7			15

图 55

4	21	5	12
	6	3	
	20	14	
7	2	24	15

图 56

4	21	5	12
	6	3	
2	20	14	9
7	2	24	15

图 57

4	21	5	12
20	6	3	
9	20	14	2
7	2	24	15

图 58

4	21	5	12
	6	3	
1	20	14	18
7	2	24	15

图 59

4	21	5	12
	6	3	
18	20	14	1
7	2	24	15

图 60

4	21	5	12
10	6	3	28
18	20	14	1
7	2	24	15

图 61

4	21	5	12
15			7

图 62

4	21	5	12
	6	28	
	1	30	
15			7

图 63

4	21	5	12
	6	1	
	28	3	
15			7

图 64

4	21	5	12
	3	1	
	28	6	
15			7

图 65

4	21	5	12
	[illegible]	28	
	1	6	
15	8	6	7

图 66

4	21	5	12
	9	28	
	1	20	
15			7

图 67

4	21	5	12
	9	1	
	28	20	
15			7

图 68

4	21	5	12
	20	1	
	28	9	
15			7

图 69

4	21	5	12
	2	28	
	1	9	
15	12	4	7

图 70

4	21	5	12
	18	1	
	28	10	
15			7

图 71

4	21	5	12
	18	28	
	1	10	
15			7

图 72

4	21	5	12
	10	1	
	28	18	
15			7

图 73

4	21	5	12
	10	28	
	1	18	
15	24	2	7

图 74

4	21	5	12
	10	28	6
	1	18	10
15	24	2	7

图 75

4	21	5	12
6	10	28	3
14	1	18	20
15	24	2	7

图 76

【按图说明】

在“原图”中，先从底行二角填起：

因有：21 × 5 = 1 × 105 = 3 × 35 = 7 × 15【即 105 的“V”有 4 次】

故有三个方案，如包括这底行二角交换数字，则共有六个方案。

(一)如以 1、105 为底行左、右二角数，则因 1 × 4 = 4，这“4”

不能再分解为二个不同因数，故应舍去这一方案，即图1，【如将1、105交换位置，也是这样。】

（二）如以3、35为底行左、右二角数，则有：

【斜行对角】$3\times12=1\times36=2\times18=4\times9$【即36的V有4次】

【斜行对角】$4\times35=1\times140=2\times70=5\times28=7\times20=10\times14$【即140的V有6次】

这时，由小到大，如取中间四数为1、36和2、70，或1、36和5、28或1、36和7、20，都因每四数中有交叉对乘的1×2或1×5或1×7，它们都不能再分解为另外二个不同因数【以下如有同这类情况时，只舍去这一对的因数，不再说明】，如取中间四数为1、36和10、14，并通过计算得到图3，在图3的左、右直行中，因有$3\times4=1\times12=2\times6$，其中"1"和"2"都相重；如将图3的中心四数，斜对交换位置成图4、图5、图6，则因有$\frac{10\times1}{21}$不等于整数【因为中间直行的10×1应等于另一中间直行的上、下二数之积，下同】，$\frac{14\times1}{21}$、$\frac{14\times1}{5}$，也都不等于整数，故图4、图5、图6都不成，要舍去；如取中间四数为2、18和7、20，得到图7，也和上面所说的一样，因左直行上、下二角之积，即$4\times3=1\times12=2\times6$，其中"12"和"2"都相重，又如交换数字成图8、图9、图10，又因$\frac{2\times7}{5}$，$\frac{18\times7}{5}$，$\frac{2\times7}{21}$都不等于整数，故图7、图8、图9、图10都不成，要舍去；如取中间四数为2、18和10、14，并通过计算得到图11，其中"12"相重；如将图11的中心四数交换位置成图12、图13、图14，则因$\frac{18\times10}{21}$、$\frac{14\times2}{21}$、$\frac{10\times2}{21}$都不等于整数，故图11、图12、图13、图14都不成，要舍去。【中间四数不能有4、9，因"4"已相重】

如将图2底行左、右二角数字交换为35、3，成图15，则中间四

数由于：

【斜行对角】4 × 3 — 2 × 6【还有 1 × 2，但因“12”相重，应舍去】

【斜行对角】12 × 35 — 1 × 420 — 7 × 60 — 15 × 28【还有的因数字相重，故都舍去】

这时，如取中间四数为 2、6 和 1、420，因有 1 × 2 不能再分解二个不同因数，如取中间四数为 2、6 和 7、60，如图 16、图 17、图 18，因 $\frac{7\times2}{5}$，$\frac{7\times6}{5}$，$\frac{2\times7}{21}$ 都不等于整数，故这些图都应舍去；如图 19，其中“2”相重；如取中间四数为 2、6 和 15、28，如图 20，其中“6”相重，如将图 20 中间四数斜对交换位置成图 21、图 22、图 23，因 $\frac{2\times28}{21}$，$\frac{28\times2}{5}$，$\frac{28\times6}{5}$ 都不等于整数，故这些图都舍去。

（二）如“原因”底行二角填为 7、15，如图 24，则有：

【斜行对角】7 × 12 — 1 × 84 — 2 × 42 — 3 × 28 — 6 × 14【还有 4 × 21，但“4”相重】

【斜行对角】4 × 15 — 1 × 60 — 2 × 30 — 3 × 20 — 6 × 10【还有 5 × 12，但“12”相重】

这时，如取中间四数为 1、84 和 6、10【不能取 1、84 和 2、30，或 1、84 和 3、20，因有 1 × 2 或 1 × 3 都不能分为另外二个不同因数】如图 25，因 1 × 6 只能再分为 2 × 3，但“2”相重，又如图 26，图 27，图 28，因 $\frac{1\times6}{5}$，$\frac{10\times1}{21}$，$\frac{6\times1}{21}$ 都不等于整数，故这些图也要舍去，如取中间四数为 2、42 和 3、20，如图 29，因 2 × 3 只能再分解为 1 × 6，但“6”相重，又如图 30，图 31，图 32，因 $\frac{2\times3}{5}$，$\frac{20\times2}{21}$，$\frac{3\times2}{21}$ 都不等于整数，这些图也应舍去；如取中间四数为 2、42 和 6、10，如图 33、图 34、图 35，因有 $\frac{10\times2}{21}$，$\frac{6\times2}{21}$，$\frac{2\times6}{5}$ 都不等于整数，故这些图也要舍去；又如图 36，其中“4”“12”都相重；如取中间四数为

3、28和2、30，如图37、图38、图39、图40，因有$\frac{3\times2}{5}$，$\frac{2\times28}{21}$，$\frac{28\times2}{5}$，$\frac{2\times3}{21}$都不等于整数，这些图也要舍去；如取中间四数为3、28和6、10，如图41，其中“6”相重。又如图42、图43、图44，因有$\frac{3\times6}{5}$，$\frac{28\times6}{5}$，$\frac{6\times3}{21}$都不等于整数，故这些图也要舍去；如取中间四数为6、14和1、60，如图45、图46、图47、图48，因有$\frac{6\times1}{5}$，$\frac{1\times14}{21}$，$\frac{14\times1}{5}$，$\frac{1\times6}{21}$都不等于整数，故这些图也要舍去；如取中间四数为6、14和2、30，如图49、图50、图51、图52，因有$\frac{2\times6}{5}$，$\frac{2\times14}{21}$，$\frac{14\times2}{5}$，$\frac{2\times6}{21}$都不等于整数，故这些图也要舍去；如取中间四数为6、14和3、20，如图53、图54、图55，因有$\frac{14\times3}{5}$，$\frac{3\times6}{21}$，$\frac{6\times3}{5}$都不等于整数，故这些图也要舍去，再如图56，这时图56第二横行左右二数之积等于第二横行中间二数之积，故有$6\times3=1\times18=2\times9$。

如取图56第二横行左、右二数为2、9，如图57，因有$\frac{4\times7}{9}$不等于整数；交换为9、2，如图58，但其中“20”相重。

如取图56第二横行左右二数为1、18，如图59，则因有$\frac{4\times7}{18}$不等于整数，如交换位置成图60，这时，因$20\times14=8\times35=10\times28$

【还有的，但都相重，故舍去】

其中有10、28填入第二横行左、右二数，得到图61，已全部符合要求。

如果要继续推算下去

如将图24底行左右二角数字交换位置为15、7，如图62，则中

间四数由于：

【斜行对角】$4 \times 7 = 1 \times 28 = 2 \times 14$

【斜行对角】$12 \times 15 = 1 \times 180 = 2 \times 90 = 3 \times 60 = 6 \times 30$

$= 9 \times 20$

$= 10 \times 18$

【还有 4×45 和 5×36，但因“4”和“5”相重】

中间四数不能取为 1、28 和 2、90 或 1、28 和 3、60，因为其中有 1×2 或 1×3 都不能分解为另外二个不同因数。

如取中间四数为 1、28 和 6、30，如图 63、图 64、图 65，因有 $\frac{1 \times 6}{5}$，$\frac{6 \times 28}{5}$，$\frac{1 \times 6}{21}$ 都不等于整数，故这些图也要舍去，又如图 66，其中“6”相重；如取中间四数为 1、28 和 9、20，如图 67、图 68、图 69，因有 $\frac{9 \times 1}{5}$，$\frac{9 \times 28}{5}$，$\frac{1 \times 9}{21}$ 都不等于整数，故这些图也要舍去，又如图 70，其中“4”和“12”都相重；如取中间四数为 1、28 和 18、10，如图 71、图 72、图 73，因有 $\frac{18 \times 28}{5}$，$\frac{18 \times 1}{5}$，$\frac{18 \times 1}{21}$ 都不等于整数，故这些图也要舍去，图 74，第二横行左、右二数之积等于 $1 \times 18 = 3 \times 6$，第三横行左、右二数之积等于 $10 \times 28 = 8 \times 35 = 14 \times 20$【还有 $1 \times 280 = 2 \times 140 = 4 \times 70 = 5 \times 56 = 7 \times 40$，但其中“1”“2”“4”“5”“7”都相重】，又如图 75，其中“10”相重。最后将图 75 第二横行左、右二端数字交换，可填成图 76，这图全部符合要求。

故由“原图”按以上经过推算可填成图 61 和图 76。

图 B 题 32 已知外层格的数字，要求再填中间 9 格的数字。填法提示：只须将二个对称数之积进行开二次方，它就是这图的中心数字，将中心数字去除已知【即外层格】数，得出的“分数”。又查“中心数字表”的“分数”，剔除去已为外层格的“分数”剩下的选作中间格的“分数”，然后就可以仿前面的例去计算就成了。如图解 216

和图解 217，每行 5 数之积 = 78^5。

338	9	2028	36	13
6				1014
117				52
26				234
468	676	3	169	18

图 *B* 题 32

		8		
	$\frac{1}{2}$	$\frac{78}{1}$	$\frac{1}{39}$	4
	$\frac{2}{39}$	78	$\frac{39}{2}$	
	$\frac{39}{1}$	$\frac{1}{78}$	$\frac{2}{1}$	

图解 216

	39	6084	2	
	4	78	1521	
	3042	1	156	

图解 217

		8		
	2	225	60	4
	900	30	1	
	15	4	450	

图 *B* 题 33

$\frac{6}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{2}{5}$				$\frac{5}{2}$
$\frac{5}{6}$				$\frac{6}{5}$
$\frac{1}{10}$				$\frac{10}{1}$
$\frac{5}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{6}$

图解 218

180	10	458	50	6
12				754
25				36
3				300
150	90	20	18	5

图解 219

图 *B* 题 33 已知中间 9 格的数字，求外层格数字，填法也同上例，先作图解 218，最后计算填成图解 219，每行 5 数之积 = 30^5

图 *B* 题 34，已知外层格数字，要求再填中间 16 格。填法是，先将外层四个角连乘数之积做为中间每行 4 数之积。并选已填好的 16 格图，再用配方方法，求出它每行 4 数之积与外层四个角连乘数之积的比例系数，如：

先填好如下的 16 格图，图解 220，并立下式：

$$\frac{315 \times 140 \times 1470 \times 30}{1 \times 10 \times 18 \times 28} = 385875$$

上式右数就是 16 格图【图解 220】每行 4 数之积应倍大的系数。将数字对照后得到 *b* 值中的 15、20 与外层格【指 36 格图】数字重复，故只须把 *b* 各值乘以这系数就成了，故得到图解 221。每行 6 数之积 = 210^6。（注：因为已知这 36 格图二个对角数的乘积的开方

数为 210，其素因数是 2，3，5，7，所以要选用的 16 个格图，其中心四数也要含有 2、3、5、7 因数，但四数之积要小于 210^4，以便取得较大的比例系数来倍大和外层相同的数字，因此，本题也可选本章第五节例六图 $B50$ 和图 $B51$ 为依据，以同样方法去计算填数，请读者自己去演算。)

315	70	735	180	980	30
35					1260
90					490
2940					15
20					2205
1470	630	60	245	45	140

图 B 题 34

15_b	14_d	6_c	4_a
24_c	1_a	10_b	21_d
2_a	18_c	28_d	5_b
7_d	20_b	3_a	12_c

图解 220

315	70	735	180	980	30
35	5788125	14	6	4	1260
90	24	1	3858750	21	490
2940	2	18	28	1929375	15
20	7	7717500	3	12	2205
1470	630	60	245	45	140

图解 221

图 B 题 35 已知中间 16 格的数字，要求再填外层格数字，填法是：将中间 4 数之积开四次方、即 $\sqrt[4]{1331 \times 18 \times 600 \times 13200} = 660$

再将 660 的"分数"列出，【也可选 660 的因数的"分数"，但其"分数"必须有 12 个或 12 个以上。】如取 60 的"分数"，可仿前例填成图解 222，如果发现数字与内 16 格数字重复，而 60 的"分数"，还未用完，就要再选"分数"重新计算作图，如果没有"分数"或"分数"不符合要求，就选 660 的另一个因数的"分数"直到符合要求

为止。

	20	10800	60	14641	
	660	1331	18	12000	
	11979	600	13200	2	
	1200	22	13310	540	

图 *B* 题 35

528	220	990	165	4950	880
3300	20	10800	60	14641	132
264	660	1331	18	12000	1650
1100	11979	600	13200	2	396
330	1200	22	13310	540	1320
495	1980	440	2640	88	825

图解 222

每行 6 数之积 = 660^6。

取 210 的"分数"作图解 223

$\frac{3}{70}$	$\frac{70}{1}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{42}{5}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{35}{3}$	$\frac{1}{42}$
$\frac{14}{1}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{35}{2}$	$\frac{21}{5}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{14}$
$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{210}{1}$	$\frac{1}{105}$	$\frac{15}{1}$	$\frac{2}{5}$
$\frac{7}{30}$	$\frac{30}{1}$	$\frac{2}{105}$	210	$\frac{105}{2}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{30}{7}$
$\frac{1}{21}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{105}{1}$	$\frac{1}{210}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{21}{1}$
$\frac{10}{7}$	$\frac{21}{2}$	$\frac{2}{35}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{35}{1}$	$\frac{7}{10}$
$\frac{42}{1}$	$\frac{1}{70}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{42}$	$\frac{35}{6}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{70}{3}$

图解 223

9	14700	175	1764	36	2450	5
2940	6	3675	882	105	20	15
525	14	105	44100	2	3150	84
49	6300	4	210	11025	7	90
10	450	22050	1	42	126	4410
300	2205	12	50	42	7350	147
8820	3	252	25	1225	18	4900

图 B 题 36

每行 7 数之积 $= 210^7$

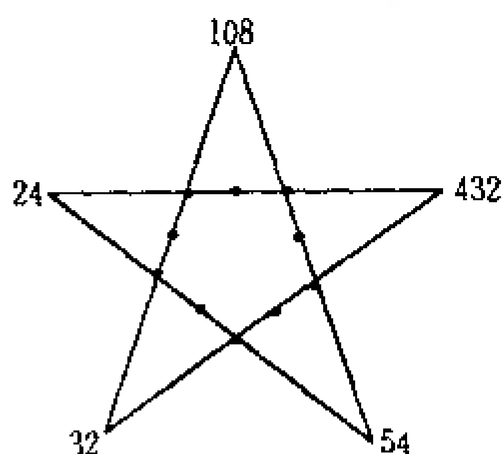
在图 B 题 37 中，先取一对对称数之积开平方作为图的中心数字，再以这数查表选其“分数”作图解 224，再将图中的分数乘中心数字即可得到图 B 题 37。

$\frac{15}{2}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{40}{1}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{24}{5}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{20}{3}$
$\frac{4}{15}$	$\frac{10}{1}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{4}$
$\frac{15}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{12}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{8}{15}$
$\frac{20}{1}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{12}{5}$	120	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{20}$
$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{60}{1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{15}{1}$
$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{3}{20}$	$\frac{40}{3}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{30}{1}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{24}{1}$	$\frac{2}{15}$

图 224

960	9	4800	4	576	5	800
32	1200	36	100	96	60	450
225	30	600	2	1440	480	64
2400	72	288	120	50	200	6
8	40	10	7200	24	360	1800
160	240	400	144	150	12	90
18	1600	3	3600	25	2880	16

图 B 题 37　　每行 7 数之积 $=120^7$。



图B题38

图 B 题 38 的填空提示：

首先将已知的五数之积开五次方，其次将得到的开方数去除各顶角数得出各“分数”；查表将这个开方数的“分数”，选出另 5 个分数作为五星图 5 个交叉点的分数，再按前面的方法立填空方程求出每行的中间点的分数。

由于算术法开五次方较难，可用分解法进行开五次方：

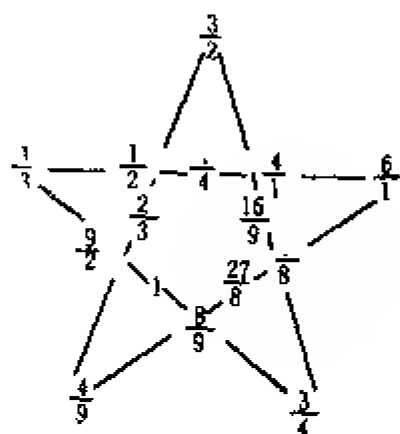
因 $108\times24\times32\times54\times432$

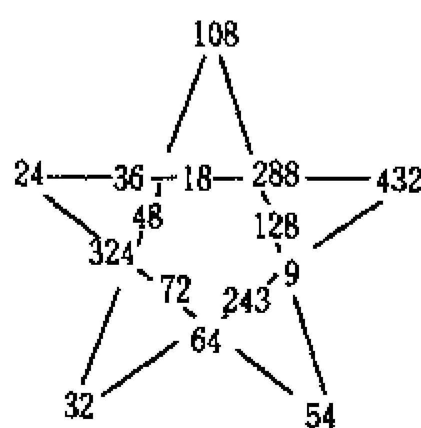
$=(3^3\times2^2)\times(3\times2^3)\times2^5\times(2\times3^3)\times(3^3\times2^4)$

$=3^{10}2^{15}$

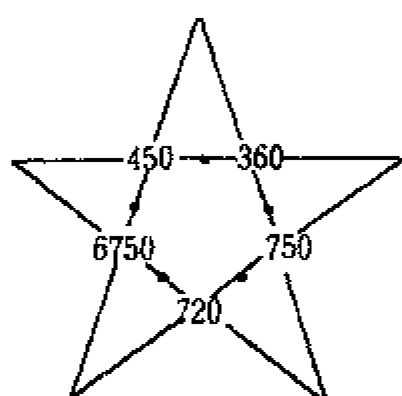
故 $(3^{10}2^{15})^{\frac{1}{5}}=3^2 2^3=9\times8=72$

将五角图【即 B 题 38】顶角数改为分数：$\frac{108}{72}$，$\frac{24}{72}$，$\frac{32}{72}$，$\frac{54}{72}$，$\frac{432}{72}$，约简为：$\frac{3}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{4}{9}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{6}{1}$，查表，72 的"分数"，再选出五个交叉点的分数，以及立填空方程求出每行中间点的分数，最后得到图解 225 和图解 226，即每行五数，五个顶角数，五个交叉点、五个中间点之积等于 72^5。

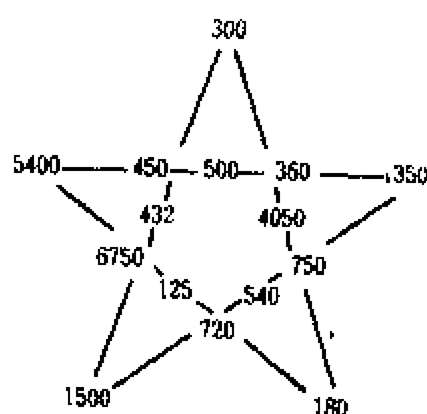

图解225



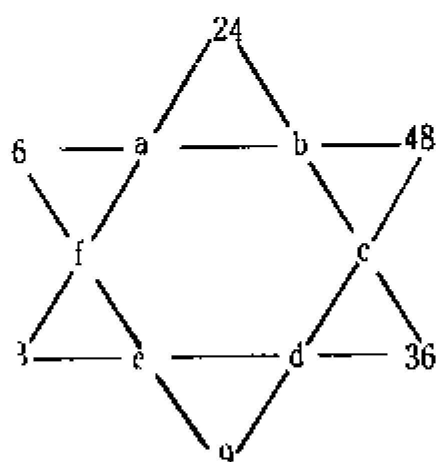
图解226



图B题39

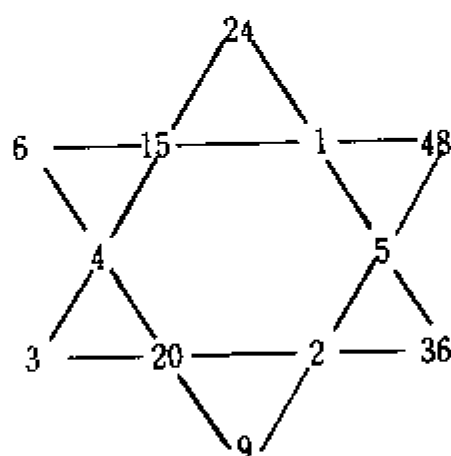


图解227



图B题40

图 B 题 40 已知六个顶角的数字，要求填中间八个交叉点数字。填法提示：把其中 6 个未知数，求出其比例关系。



图解228

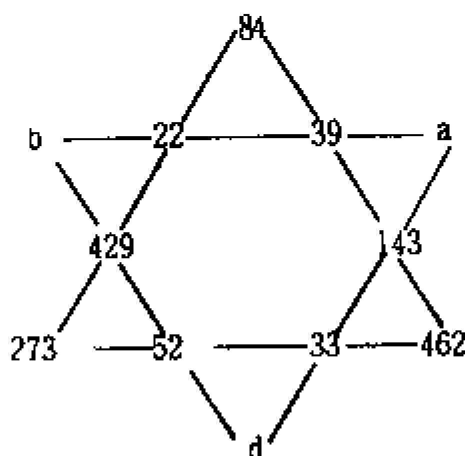
先求 a、c、e 的比例，由于 $6\times48\times a=24\times36\times c$，得到 $a=3c$；

又由于 $3\times36\times ed=48\times9\times cd$，得到 $e=4c$；

故：$e:a:c=4:3:1$；

由于 $9\times48d=24\times36b$，得到 $d=2b$

又由于 $6\times9f=3\times36d$，得到 $f=2d$



图B题41

故：$f:d:b=4:2:1$。

若取：$f=4$，$d=2$，$b=1$，$e=20$，$a=15$，$c=5$，可得到图解 228，每行 4 数之积 $=4320$

图 B 题 41，已知其中一个三角形边上 6 个点的数字，要求填剩下三个角的数字。填法提示：仿前例，将三个角的未知数立方程式求解。即：

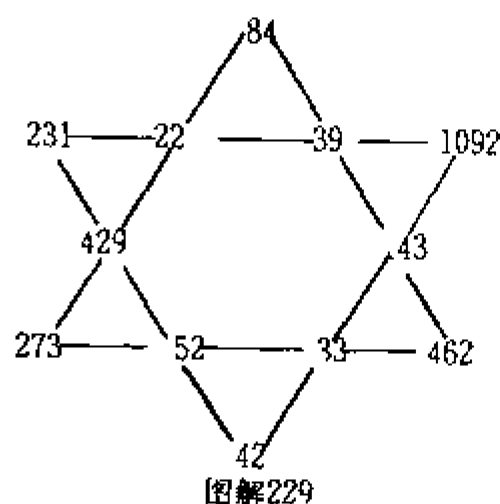
$$\begin{cases} 39ab = 84 \times 429 \times 273 & ① \\ 52db = 84 \times 22 \times 273 & ② \\ 33ad = 84 \times 39 \times 462 & ③ \end{cases}$$

解以上联立方程可得：

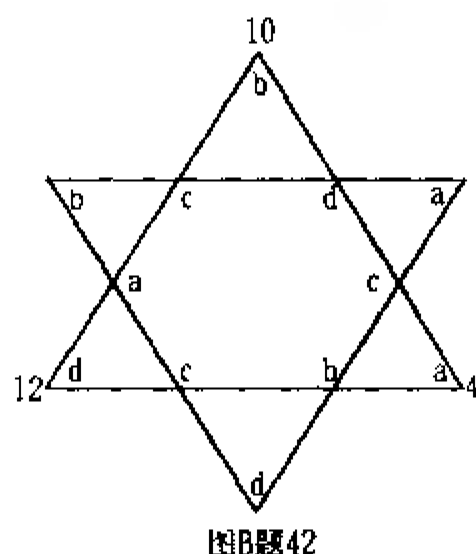
$a = 1092$，$b = 231$，$d = 42$。

可得到图解 229，每行 4 数之积 = 216432216

图 B 题 42 仅知其中一个三角形上三个角的数，要求填其余 9 个数字，这个填数法比前例难，现将填数过程详细解释如下：



图解229



图B题42

首先设法将这个已知数字的三角形的其余六数填上，然后，才仿前例填满全图。

从 16 格图套入六角形图的填法中，得知这六角图底行二个角和中间二交点，其“分数”都是互为倒数的【因为这是 16 格图中的对称数】因此，可以假设：

取此行的左角 d 的“分数”为 $\frac{1}{4}$，右角 a 为 $\frac{4}{1}$，中间的 c 和 b 的“分数”为 1,【这样讲可以避免读者将“分数”和数值混淆，因为我们的填数法，都是先填好“分数”，然后再求数值】

由于　$\frac{4}{1}a=4$，故 $a=1$

由于　$\frac{1}{4}d=12$，故 $d=48$

由于顶角 b 为 10，而底行中的 b 的“分数”定为 1，所以要先确定底行中这 b 值，不妨取 $b=6$，则顶角 b 的“分数”为 $\frac{10}{6}$，约简为 $\frac{5}{3}$，在左外斜行中，a 的“分数”的确定是至关重要的，【以后如发现数字重复或其他不符合要求时，就要重新确定它】，因 a 值等于 1 所以左外斜行上 a 的“分数”，不能取分数，只能取整数，不妨取为 $\frac{9}{1}$【这样写是为了区别数值】，将外斜行的分数立式填空求出 c 的“分数”，即：【请参阅后页的图解 230】

$$\frac{5}{3}\times(\quad\quad)\times\frac{9}{1}\times\frac{1}{4}=1$$

得到填空数 c 的“分数”为 $\frac{4}{15}$，再计算右外斜行的“分数，也可立式填空：

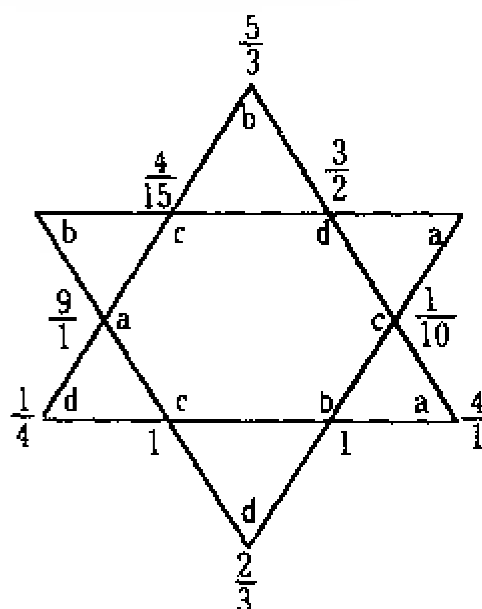
$$\frac{5}{3}\times(\quad\quad)\times(\quad\quad)\times\frac{4}{1}=1$$

得到 dc“分数”之积为 $\frac{3}{20}$

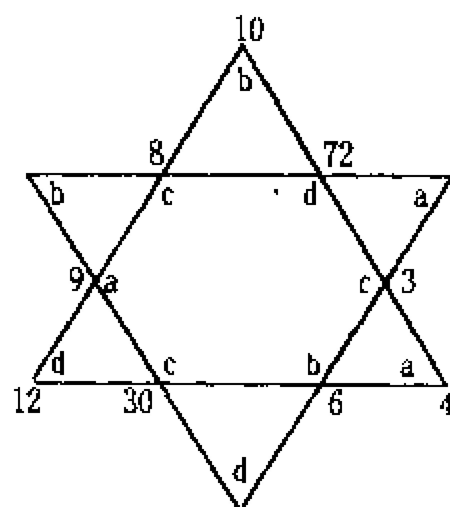
并将其分解为：$\frac{3}{20}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{10}=\frac{3}{2}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}=\cdots\cdots$

这时就要确定 c 值，由于 d 值已定为 48，因此，定出的 c 值要和 $d=48$ 和 $\frac{3}{20}$ 互相联系，如取 $\frac{3}{20}=\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}$，这 $\frac{3}{5}$ 的分母就不适合 d

值，也就是说，要取 $\frac{1}{4}$ 为 d 的分数，那么，c 值就要等于5的倍数了；如取 $\frac{3}{20}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{10}$，这 $\frac{3}{10}$ 的分母也不适合 d 值。但也要注意避免与已求出的其他数值重复，因此确定 c 值的过程是经过反复尝试计算的。



图解230



图解231

现经计算后，取 $\frac{3}{20}=\frac{1}{10}\times\frac{3}{2}$，$c=30$，于是以 c 的“分数”为 $\frac{1}{10}$，d 的“分数”为 $\frac{3}{2}$，将其填入右外斜行，得到图解 230，再按各“分数”计算各值得到图解 231，只剩下三个角的数字未填，这时，除了可仿前例立方程式去求解外，也可按这些“分数”立填空式，即由图解 230 中二个内斜行和上横行立式有：$\frac{9}{1}\times b=\frac{1}{10}a$ ④

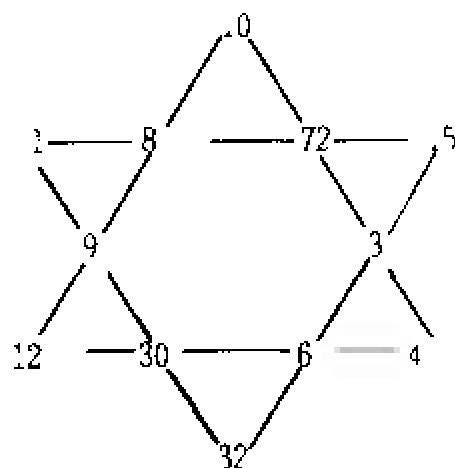
$\frac{4}{15}\times\frac{3}{2}=\frac{2}{5}$ 得到上横行 ab 的“分数”之积为 $\frac{5}{2}$，即

$$ab=\frac{5}{2}\Rightarrow a=\frac{5}{2b} \quad ⑤$$

将④⑤式整理得到 $a=\frac{15}{1}$，$b=\frac{1}{6}$，又从图解 230 的内斜行立

式填空：

$\frac{1}{6} \times \frac{9}{1} \times 1 \times (\quad) = 1$，得到底角 $d = \frac{2}{3}$，最后得到图解232。



图解232

每行 4 数之积　8640

如果填好六角星图中的一个三角形后【如图解 231】在再填剩下的三个角数时，又发现有重复数字或其他不符合要求的情况，那就要重新计算再填，因为填好其中一个三角形后，不一定就符合填好六角星图，读者不妨另例演算，就可知道。

图 B 题 44，已知六个角的数字，要求填其余各数。填法提示：将三个对角数之积开平方就是这图的中心数字，以中心数字去除已知数，就是这数字的"分数"，再把中心数的"分数"列出来，仿前面的方法，就可填成最后的六角星图即图解 235。每行 5 数之积 960^5。

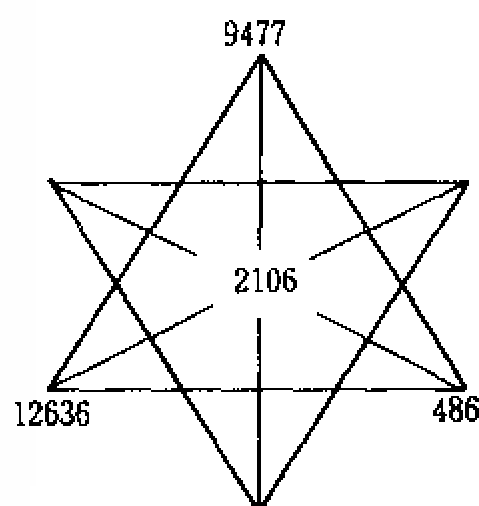
图B题44

图解233

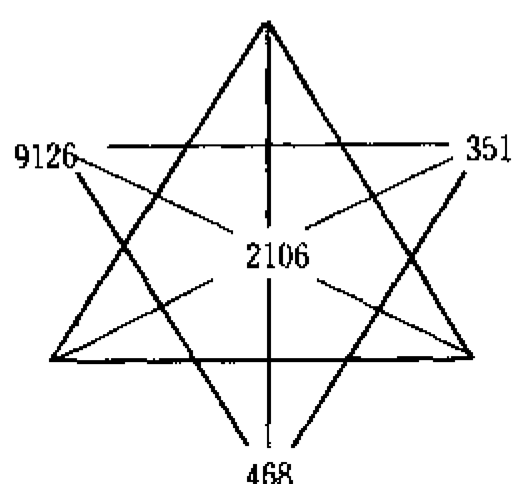
图解234

图解235

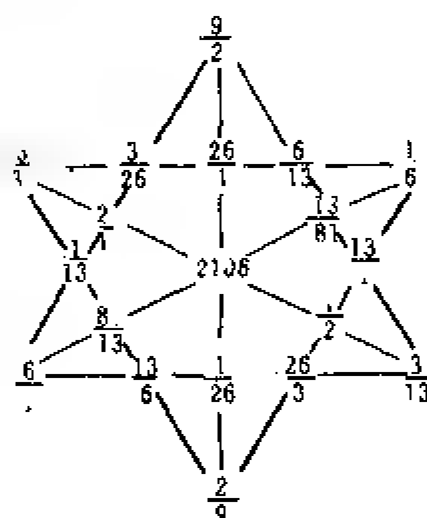
图 B 题 43、已知其中一个三角形的三个角的数字以及中心数字，要求再填其余各数，其填法提示：因对称角二数之积等于中心数的平方数，故可以通过计算直接求出其余三个角的数字，然后仿上例求出其他各数。如图解 236、图解 237、图解 238。每行 5 数之积 2106^2。



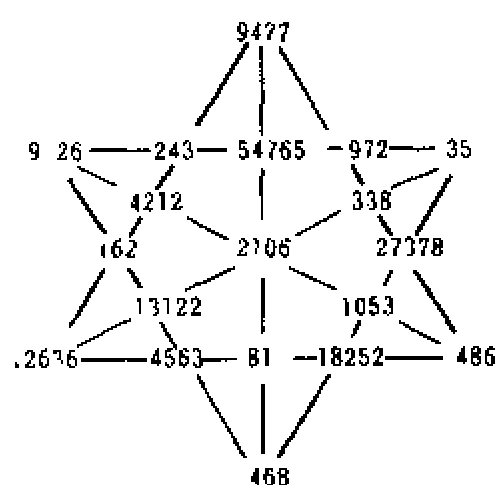
图B题43



图解236

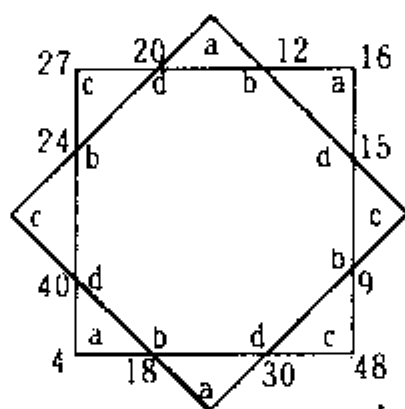


图解237

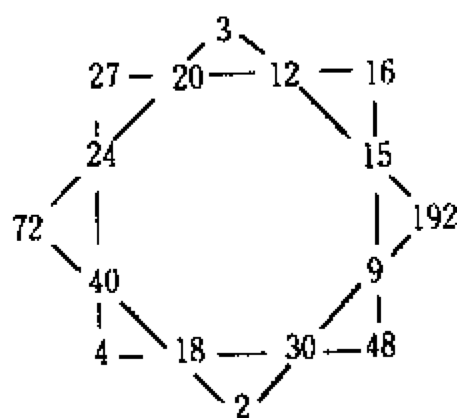


图解238

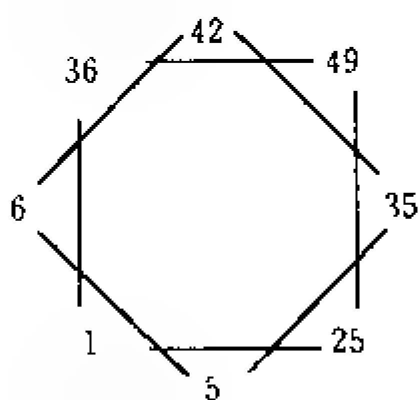
图 *B* 题 45，已知其中正方形 12 个数字，其余的数字可通过联立方程式求 解，得到图解 239，每行 4 数之 — 103680。如果已知八个角的数字，如图 *B* 题 46，也可同样用联立方程式求解其余各数，即得到图 240。每行 4 数之积 264600。



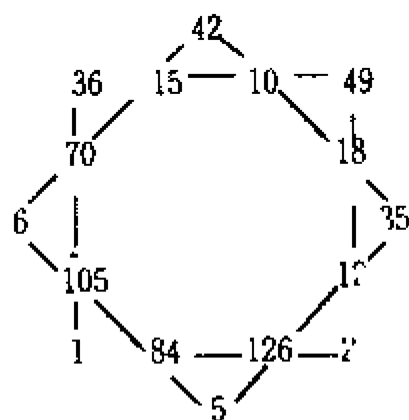
图B题47



图解239

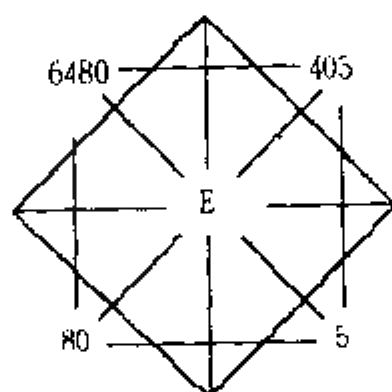


图B题46

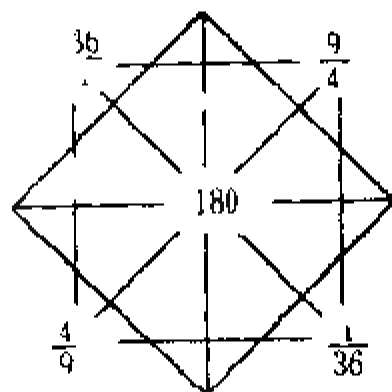


图解240

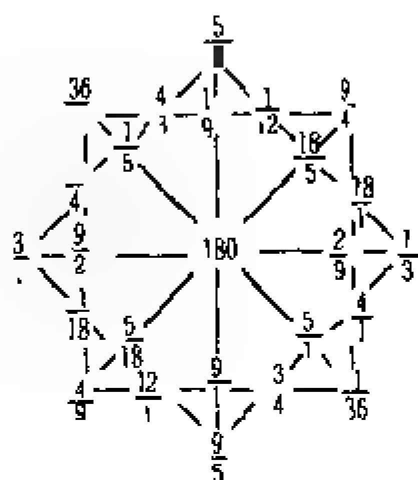
图 B 题 47 的填法，和以上六角星图相同。如图解 241，图解 242，图解 243。每行 5 数之积 $= 180^5$。



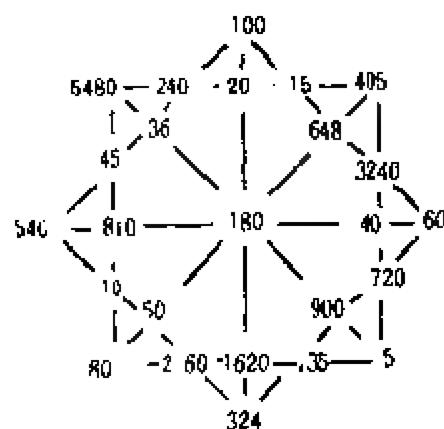
图B题47



图解241

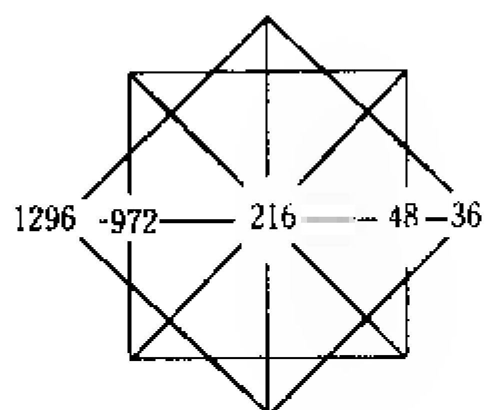


图解242

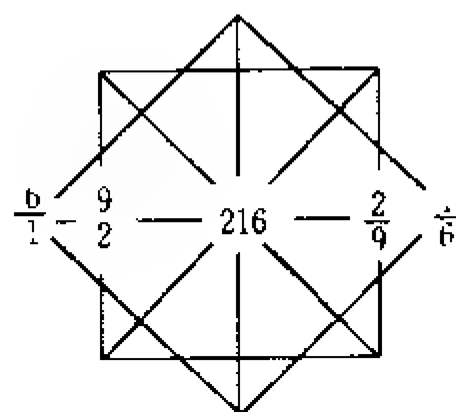


图解243

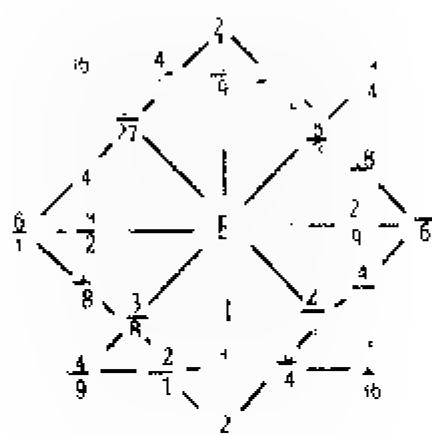
图 B 题 48 的填法，也同上题，先图解 244，次图解 245，最后得到图解 246，每行 5 数之积 $= 216^5$。



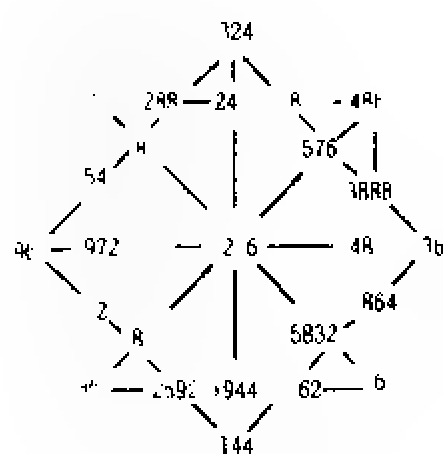
图B题48



图解244



图解245



图解246

3 题的解答用表列下

	标准分解式	用求 T 公式（　）计算	得到（　）个 T
500	$500 = 2^2 \times 5^3 = P_0^2 P_1^3$	由公式 1 得知 P_1^3 有 3 个 T， 由公式 3 得知 $P_0P_1^3$ 有 $(1 + 3 \times 3) = 10$ 个 T 由公式 7 得到 $P_0^2P_1^3 = P_0 \times P_0P_1^3 = 10 + (10 - 3)(2 - 1) = 17$	得到 17 个 T
625	5^4	用公式(1)：P^4 的 $T = 4$	4
576	$576 = 2^6 \times 3^2 = P_0^6 P_1^2$	同前理，由公式 1，公式 3，公式 7 可得： $P_0^6P_1^2 = P_0^5 \times P_0P_1^2 = 7 + (7 - 2)(6 - 1) = 32$	得到 32 个 T
686	2×7^3	用公式(3)：$P_0P_1^3$ 的 $T = 3^0 + 3 \times 3$	代入公式： 2×7^3 的 $T = 1 + 3 \times 3 = 10$
700	$700 = 2^2 \times 5^2 \times 7 = P_0^2P_1^2P_2$	由公式 7 得到 $P_0^2P_1^2P_2 = P_0 \times P_0P_1^2P_2 = P_0 \times P_1 \times P_0P_1P_2$ 由公式 2 分别得知 $P_0P_1P_2 = 1 + 3 + 9 = 13$ $P_0P_1 = 1 + 3 = 4$ $\therefore P_0P_1^2P_2 = P_1 \times P_0P_1P_2 = 13 + (13 - 4) = 22$	$\because$ 公式 3 得 $P_1^2P_2$ 有 $1 + 2 \times 3 = 7$ 个 T $\therefore P_0^2P_1^2P_2 = P_0 \times P_0P_1^2P_2 = 22 + (22 - 7) = 37$ T
840	$7 \times 5 \times 3 \times 2^3$	用公式(5)：$P_0P_1P_2P_3^3$ 的 $T = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3$，	代入公式： $1 + 3 + 9 + 27 \times 3 = 94$
975	$13 \times 3 \times 5^2$	用公式(4)：$P_0P_1P_2^2$ 的 $T = 3^0 + 3^1 + 3^2$，	代入公式： $1 + 3 + 9 \times 2 = 22$
1001	$11 \times 13 \times 7$	用公式(2)：$P_0P_1 \cdots P_n$ 的 $T = 3^0 + 3^1 + \cdots 3^n$	代入公式： $1 + 3 + 3^2 = 13$
2310	$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$	用公式(2)：$= 3^0 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4$	代入公式： $1 + 3 + 9 + 27 + 81 = 121$
6859	19^3	用公式(1)：P^3 的 $T = 3$	3

4 题的解答用表列下

整数	“分数”T.
416	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{13},\frac{2}{13},\frac{4}{13},\frac{8}{13},\frac{1}{16},\frac{13}{16},\frac{1}{26},\frac{1}{32},\frac{13}{32},\frac{1}{42},\frac{1}{104},\frac{1}{208},\frac{1}{416}$ 共 16 个 因　$416=13\times 2^5$ 用公式(3)，P_0P_1 的 $T=3^0+3$， 故得到 $1+3\times 5=16$　验证无误
420	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{4}{7},\frac{5}{7},\frac{6}{7},$ $\frac{1}{10},\frac{3}{10},\frac{7}{10},\frac{1}{12},\frac{5}{12},\frac{7}{12},\frac{1}{14},\frac{3}{14},\frac{5}{14},\frac{1}{15},\frac{2}{15},\frac{4}{15},\frac{7}{15},\frac{14}{15},\frac{1}{20},\frac{3}{20},\frac{7}{20},$ $\frac{1}{21},\frac{2}{21},\frac{4}{21},\frac{5}{21},\frac{10}{21},\frac{20}{21},\frac{1}{28},\frac{3}{28},\frac{5}{28},\frac{15}{28},\frac{1}{30},\frac{7}{30},\frac{1}{35},\frac{2}{35},\frac{3}{35},\frac{4}{35},\frac{6}{35},$ $\frac{12}{35},\frac{1}{42},\frac{5}{42},\frac{1}{60},\frac{7}{60},\frac{1}{70},\frac{3}{70},\frac{1}{84},\frac{5}{84},\frac{1}{105},\frac{2}{105},\frac{4}{105},\frac{1}{140},\frac{3}{140},\frac{1}{210},\frac{1}{420}$ 共 67 个。 因 $420=3\times 5\times 7\times 2^2$ 用公式(5)，$P_0P_1P_2P_3$ 的 $T=1+3+3^2+3^3$， 故得到 $1+3+9+27\times 2=67$　验证无误
456	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{1}{12},\frac{1}{19},\frac{2}{19},\frac{3}{19},\frac{4}{19},\frac{6}{19},\frac{8}{19},\frac{12}{19},\frac{1}{24},$ $\frac{19}{24},\frac{1}{38},\frac{3}{38},\frac{1}{57},\frac{2}{57},\frac{4}{57},\frac{8}{57},\frac{1}{76},\frac{3}{76},\frac{1}{114},\frac{1}{152},\frac{3}{152},\frac{1}{228},\frac{1}{456}$ 共 31 个。 因 $456=19\times 3\times 2^3$ 用公式(4)　$P_0P_1P_2$ 的 $T=3^0+3^1+3^2$， 故得到 $1+3+27=31$，验证无误

（接上页的表）

480	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{5}{8},\frac{1}{10},\frac{3}{10},\frac{1}{12},$ $\frac{5}{12},\frac{1}{15},\frac{2}{15},\frac{4}{15},\frac{8}{15},\frac{1}{16},\frac{3}{16},\frac{5}{16},\frac{15}{16},\frac{1}{20},\frac{3}{20},\frac{1}{24},\frac{5}{24},\frac{1}{30},\frac{1}{32},\frac{3}{32},\frac{5}{32},$ $\frac{15}{32},\frac{1}{40},\frac{3}{40},\frac{1}{48},\frac{5}{48},\frac{1}{60},\frac{1}{80},\frac{3}{80},\frac{1}{96},\frac{5}{96},\frac{1}{120},\frac{1}{160},\frac{3}{160},\frac{1}{240},\frac{1}{480},$ 共 49 个 因 $480=5\times3\times2^5$ 用公式(4) 得到 $1+3+3^2\times5=49$ 验证无误
501	$\frac{1}{3},\frac{1}{167},\frac{3}{167},\frac{1}{501},$ 共 4 个 因 $501=3\times167$ 用公式(2) P_1P_2 的 T $1+3=4$ 验证无误
3888	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{4}{9},\frac{8}{9},\frac{1}{12},\frac{1}{16},\frac{3}{16},\frac{9}{16},\frac{1}{18},$ $\frac{1}{24},\frac{1}{27},\frac{2}{27},\frac{4}{27},\frac{8}{27},\frac{16}{27},\frac{1}{36},\frac{1}{48},\frac{1}{54},\frac{1}{72},\frac{1}{81},\frac{2}{81},\frac{4}{81},\frac{8}{81},\frac{16}{81},\frac{1}{108},$ $\frac{1}{144},\frac{1}{162},\frac{1}{216},\frac{1}{243},\frac{2}{243},\frac{4}{243},\frac{8}{243},\frac{16}{243},\frac{1}{324},\frac{1}{432},\frac{1}{486},\frac{1}{648},\frac{1}{1296},\frac{1}{972}$ $\frac{1}{1944},\frac{1}{3888},$ 共 49 个 因 $3888=2^4\times3^5=P_0^4P_1^5$ 用公式 1 得到 P_1^5 的 T 为 5， 用公式 3 得到 $P_0P_1^5$ 有 $1+3\times5=16$T， 用公式 7 得到 $P_0^4P_1^5=P_0^3P_0P_1^5=16+(16-5)(4-1)=49$ 验证无误。

5. 题解，先分析由 301 至 400 的各个连续数，看它能分解为多少个因数才符合应用求 T 公式。

（分析）(1) 因最小 4 个不同的素数之积：$2 \times 3 \times 5 \times 7 \quad 210$，故知由 301 至 400 的整数中，任一整数必小于 5 个不同素数之积。

(2) 因为 $2^9 \quad 512 > 400$，用 $P^{40} > P^{37} > P^{17} > 400$，

故知由 301 至 400 的各数不适合取等于一个素数去求 T，即不用求 T 公式(1)。

(3) 因为以 T 等于 17，37，40 分别代入求 T 公式(3) 时，有：$17 \quad 1 + 3t$，t 无整数解；

$37 \quad 1 + 3t$，得到 $t \quad 12$，而 $12 > 9$，

$40 = 1 + 3t$，得到 $t = 13$，而 $13 > 9$，这与以上分析发生矛盾，故不用求 T 公式(3)。

(4) 在 $P_0^a P_1^b$ 中，当 $a > b > 1$ 时，因有 $2^3 3^4 > 2^4 3^3 = 432 > 400$，故知由 301 至 400 的整数如取等于二个不同素数之积时，其指数之和必小于 7，故只能在 $P_0^3 P_1^3$【暂指其代表 $P_0^3 P_1^3$ 的 T，以下同】$P_0^2 P_1^3$ 式中选取，

即查阅公式有：$P_0^3 P_1^3 \quad 24$【即 24 个 T】

$P_0^2 P_1^3 \quad 17$　它符合题意。

(5) 同上理，如用三个素数的求 T 公式时，式中的指数之和要小于 7，

查阅公式有：$P_0 P_1 P_2 \quad 13$，　$P_0 P_1 P_2^2 = 22$，

$P_0 P_1^2 P_2^2 \quad 37$，此式符合题意。

$P_0 P_1 P_2^5 \quad 31$，

$P_0 P_1 P_2^4 = 40$，此式符合题意。

$P_0^2 P_1^2 P_2 \quad 62$，　$P_0 P_1^2 P_2^3 = 52$

(6) 因 $2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \quad 420 > 400$，故知如果运用 4 个素数的求 T 公式时，它的指数之和必小于 5，并查阅公式有：

$P_0 P_1 P_2 P_3 = 40$　此式符合题意。

综上得到以下的求 T 公式符合题意，即：

$P_0^2P_1^3 = 17$，　$P_0P_1^2P_2^2 = 37$，

$P_0P_1P_2^4 = 40$，　$P_0P_1P_2P_3 = 40$

现在再计算由 301 至 400 的整数中，有哪些数符合上式。

先求 $P_0^2P_1^3$，如取 $P_0 = 2$，

得到　$\dfrac{301 \sim 400}{P_0^2 = 2^2 = 4} = 76 \sim 100$，

这就是说，由 76 至 100 的整数中有哪些数等于某一素数的三次方数呢？一看就知没有。

再取 $P_1 = 2$，

得到　$\dfrac{301 \sim 400}{P_1^3 = 2^3 = 8} = 38 \sim 50$，

那么，由 38 至 50 的整数中，哪些数等于某一素数的二次方数呢？一看就知：$49 = 7^2$

故 $P_0^2P_1^3 = 7^2 \times 2^3 = 392$

如此，由小到大，取其 P_0 和 P_1 之值去计算，

即取 2，3，5，7，不能再取 11，因为：

$\dfrac{301 \sim 400}{11^2 = 121} = 3$，只有一个整数 3，而 3 不是三次方数。

经这样计算后，得到只有：392 有 17 个 T。

再求 $P_0P_1^2P_2^2$，

先从式中高次方的 P_1 和 P_2 取起，

如取 $P_1 = 2$，　$P_2 = 3$，

得到　$\dfrac{301 \sim 400}{2^2 \times 3^2 = 36} = 9 \sim 11$，

故有：$P_0P_1^2P_2^2 = 2^2 \times 3^2 \times 11 = 396$。

再取 $P_1 = 3$，　$P_2 = 5$，

得到　$\dfrac{301 \sim 400}{3^2 \times 5^2 = 225}$（易知由 301 至 400 无 225 的整数商）

得知，$P_0P_1^2P_2^2$ 在 301 至 400 的整数中，只有

$$P_0P_1^2P_2^2 = 2^2 \times 3^2 \times 11 = 396$$

而 396 有 37 个 T。

再求 $P_0P_1P_2^4$

仿以上方法，可得 $P_0P_1P_2^4 = 2^4 \times 3 \times 7 = 336$

故有：336 有 40 个 T，

同上法可得

$$P_0P_1P_2P_3 = 2 \times 3 \times 5 \times 11 = 330,$$

$$P_0P_1P_2P_3 = 2 \times 3 \times 5 \times 13 = 390,$$

答：由 301 至 400 的整数中有：

330 = 40 个 T， 336 = 40 个 T，390 = 40 个 T，

392 = 17 个 T、 396 = 37 个 T。

第十六章

1. 解：猫来回活动所到达的点位的时间应分为去程和回程，金字塔图有 16 个点位，都是猫所经过的点位，所以去程所到达这点的时间是：原点位 + $(2 \times 16 - 2)k$，回程是：$(2 \times 16 -$ 原点位$) + (2 \times 16 - 2)k$。老鼠的行程也分为去程和回程，老鼠所活动的点不同，可按它活动的点数列出计算行程公式【下详】，计算猫抓老鼠的时间和点位，是求出某点位上猫鼠同时到达的时间，现分别计算如下：【以上 k 是常数：即 0，1，2……。】

1 号老鼠到达的点位和行程公式

1，…… $1 + 2a$

2，…… $2a$

【a 是常数：0，1，2，3，……】

猫到达 1 号老鼠的点位和时间

12，…… 去程公式 $12 + 30k$，回程公式 $(2 \times 16 - 12) + 30k$

2，…… 去程公式 $2 + 30k$，回程公式 $(2 \times 16 - 2) + 30k$

将这二个点位分别求出猫鼠相遇的时间。因此，有下列方程，求出最小的正整数【下同】

$3(1+2a)-12+30k$ 这式没有整数解，舍去。

$3(1-2a)-20+30k$ 同上

$3(2a)-2+30k$ 同上

$3(2a)$ $30k$ 解得 $a-k-0$ 舍去，取最小正整数 $k-1, a$ 5，以 k 1 代入 $30k$ 得到 30，

故猫在当夜 0 时 30 分，第一次回程时在第 2 号点位抓住 1 号老鼠。

2 号老鼠到达的点位和行程公式

$$\begin{cases}1,\cdots\cdots 1+4a\\ 2,\cdots\cdots 实\ 2a\\ 3,\cdots\cdots 3+4a\end{cases}$$

猫到达 2 号老鼠活动的点位和时间

$$\begin{cases}13,\cdots\cdots \quad 去程\ 13+30k, 回程(2\times16 \quad 13)+30k\\ 11,\cdots\cdots \quad 去程\ 11+30k, 回程(2\times16 \quad 11)+30k\\ 3,\cdots\cdots \quad 去程\ 3+30k, 回程(2\times16 \quad 3)+30k\end{cases}$$

仿上例有下列方程

$3(1+4a)-13+30k$ 无整数解

$3(1+4a)$ $19+30k$ 无整数解

$3\times2a-11+30k$ 无整数解

$3\times2a-21+30k$ 无整数解

$3(3-4a)$ $3+30k$ 解得 $k=1$ a 2，

以 $k-1$ 代入 $3+30k$ 解得 33

$3(3+4a)-29+30k$ 无整数解

故猫在 33 分钟第二次去程时在第 3 号点位抓住 2 号老鼠。

3 号老鼠活动的点位和行程公式

1,…… $1 + 6a$

2,…… 去程 $2 + 6a$ 回程 $6a$

3,…… 去程 $3 + 6a$ 回程 $(2 \times 4 - 3) + 6a$

4,…… $4 + 6a$

猫到达3号鼠活动的点位和时间

16,…… $16 + 30k$

14,…… 去程 $14 + 30k$,回程 $(2 \times 16 - 14) + 30k$

10,…… 去程 $10 + 30k$,回程 $(2 \times 16 - 10) + 30k$

4,…… 去程 $4 + 30k$,回程 $(2 \times 16 - 4) + 30k$

仿上例将所得到的11个方程中有整数解的演解如下:

$4(1 + 6a) = 16 + 30k$ 解得 $k = 2, a = 3$

以 $k = 2$ 代入 $16 + 30k$ 得得 76

$4(2 + 6a) = 14 + 30k$ 解得 $k = 3, a = 4$

以 $k = 3$ 代入 $14 + 30k$ 得到 104

$4 \times 6a = (2 \times 16 - 14) + 30k$ 解得 $k = 1, a = 2$,

以 $k = 1$ 代入 $18 + 30k$ 得到 48

$4(4 + 6a) = 4 + 30k$ 解得 $k = 2, a = 2$,

以 $k = 2$ 代入 $4 + 30k$ 得到 64

$4(4 + 6a) = (2 \times 16 - 4) + 30k$ 解得 $k = 2, a = 3$,

以 $k = 2$ 代入 $28 + 30k$ 得到 88

故猫有5个时间【如上】均能抓住3号鼠,而最早时间是,当夜零时48分钟第二次回程时在第14号点位上。

4号老鼠活动的点位和行程公式

1,…… $1 + 4a$

2,…… 去程 $2 + 4a$,回程 $4a$ 实 $2a$

3,…… $3 + 4a$

猫到达4号鼠活动的点位和时间

$15, \cdots\cdots$　去程 $15 + 30k$，回程 $(2 \times 16 - 15) + 30k$

$9, \cdots\cdots$　去程 $9 + 30k$，回程 $(2 \times 16 - 9) + 30k$

$5, \cdots\cdots$　去程 $5 + 30k$，回程 $(2 \times 16 - 5) + 30k$

仿前例将所得到的 6 个方程中选出有整数解的演解如下：

$5(1 + 4a) = 15 + 30k$　解得 $k = 1, a = 2$

以 $k = 1$ 代入 $15 + 30k$　得到 45

$5(3 + 4a) = 5 + 30k$　解得 $k = 1, a = 1$

以 $k = 1$ 代入 $5 + 30k$　得到 35

故猫有 2 个时间【如上】抓住 4 号鼠，最早是当夜零时 35 分钟在第二次去程时第 5 号点位上。

5 号老鼠活动的点位和行程公式

$1, \cdots\cdots$　$1 + 2a$

$2, \cdots\cdots$　$2a$

猫到达 5 号鼠活动的点位和时间

$8, \cdots\cdots$　去程 $8 + 30k$，回程 $(2 \times 16 - 8) + 30k$

$6, \cdots\cdots$　去程 $6 + 30k$，回程 $(2 \times 16 - 6) + 30k$

仿前例将所得到的 4 个方程中选有整数解的演解如下：

$7 \times 2a = 6 + 30k$　解得 $k = 4, a = 9$

以 $k = 4$ 代入 $6 + 30k$　得到 126

$7 \times 2a = (2 \times 16 - 6) + 30k$　解得 $k = 1, a = 4$

以 $k = 1$ 代入 $26 + 30k$　得到 56

故猫有 2 个时间(如上)均能抓住 5 号鼠，而最早是当夜零时 56 分在第二次回程时第 6 号位上。

至此 5 号老鼠全部抓完。

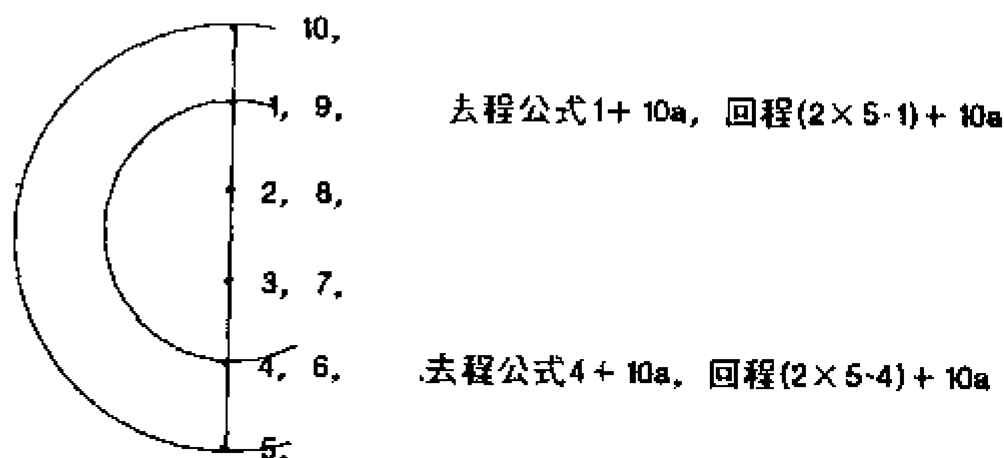
2. 解：猫先向圆心走 20 米，则猫走的圆周的直径为：$100 - 20 \times 2 = 60$ 米，周长为 $60 \times 3.1416 = 188$ 米【只取整数部分】。在原来的圆周上猫和一号老鼠的距离是 75 米，设猫在新的圆周上和一号老鼠行程的直径的交点是 x，

故有：　$10:6 = 75:x$　　解得 $x = 45$

设老鼠之间在新圆周上的距离【指老鼠行程和新圆周的交点和交点之间的距离，如下图】为 y，故有：

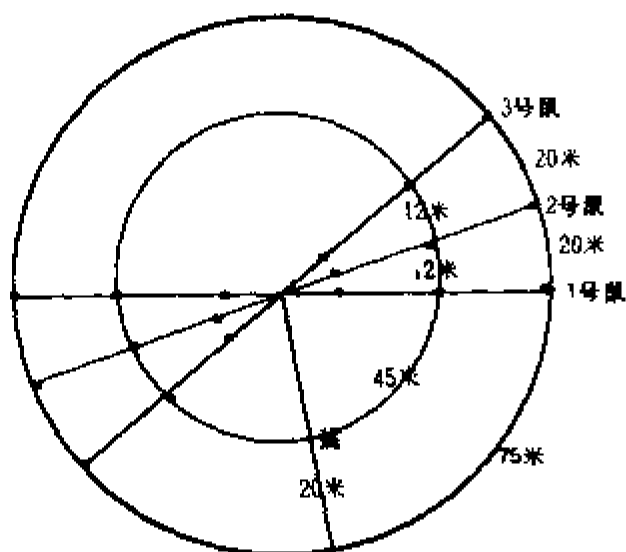
$$75:45 = 20:y \qquad \text{解得 } y = 12$$

老鼠的行程【以 20 米距离为一点】及其公式：(示意图)



图解247

猫的行程【即小圆周】及其公式：(示意图)



图解248

猫的行程公式

猫和 1 号老鼠行程的交点：

$$\begin{cases}45+188k\\ (\frac{188}{2}+45)+188k\end{cases}$$

猫和 2 号老鼠行程的交点：

$$\begin{cases}(45+12)+188k\\ (\frac{188}{2}+45+12)+188k\end{cases}$$

猫和 3 号老鼠行程的交点：

$$\begin{cases}(45+12\times 2)+188k\\ (\frac{188}{2}+45+12\times 2)+188k\end{cases}$$

猫和 1 号老鼠相遇的时间，可由下列方程求解：

$3(1+10a)=45+188k$　　解得 $k=6, a=39$，

以 $k=6$ 代入 $45+188k$　　得到 1173，

$3[(2\times 5-1)+10a]=45+188k$　解得 $k=9, a=57$，

以 $k=9$ 代入 $45+188k$　　得到 1737

$3(4+10a)=(\frac{188}{2}+45)+188k$，无整数解【舍去】

$3[(2\times 5-4)+10a]=(\frac{188}{2}+45)+188k$，无整数解【舍去】

故猫有 2 个时间【如上】能抓到 1 号鼠，最快是 1173 分钟【即翌日晚 7 时 33 分】即猫绕第 7 圈时在 1 号点位上。

猫和 2 号老鼠相遇的时间，可由下列方程求解：

$5(1+10a)=57+188k$　　解得 $k=21, a=80$

以 $k=21$ 代入 $57+188k$　　得到 4005

$5[(2\times 5-1)+10a]=57+188k$　解得 $k=1, a=4$

以 $k=1$ 代入 $57+188k$　　得到 245

$5(4+10a)=151+188k$　　无整数解

$5[(2\times 5-4)+10a]=151+188k$　　无整数解

故猫有2个时间【如上】能抓到2号鼠,最快是245分钟【即当夜4点5分】绕第2圈时在第1号位上。

猫和3号老鼠相碰的时间,可由下列方程求解:

$7(1+10a)=69+188k$　　解得 $k=6$, $a=17$

以 $k=6$ 代入 $69+188k$　　得到1197

$7[(2\times5-1)+10a]=69+188k$　　解得 $k=13$, $a=35$

以 $k=13$ 代入 $69+188k$　　得到2513

$7(4+10a)=163+188k$　　无整数解

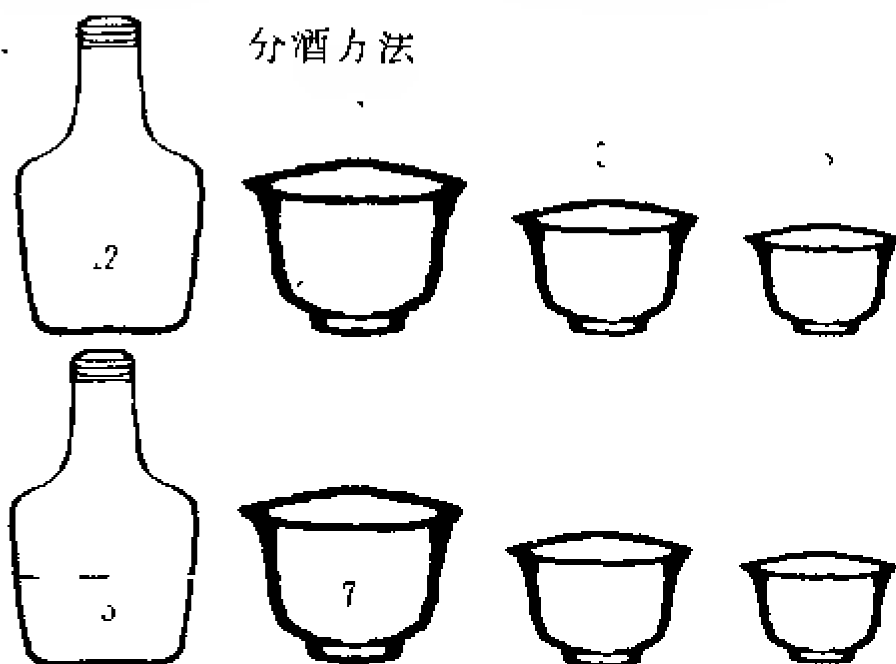
$7[(2\times5-4)+10a]=163+188k$　　无整数解

故猫有2个时间【如上】能抓到3号老鼠,最快是1197分钟【即翌日晚上7时57分】绕第7圈时在1号点位上。

至此,老鼠全部抓完。

注:本题解主要是使读者理解演算方法,因为猫的行程圆周之长188米是取 $60\times3.1416=188.49\cdots$ 的整数部分,如取为189,则演解方程中的188应改为189k,这样演算的结果当然不同了【但 $\frac{189}{2}$ 得到的不是整数,故不能取189】特此注明。

3.　　分酒方法



先倒满大碗



把大碗的酒倒满小碗



把大碗剩下的酒全部倒入中碗



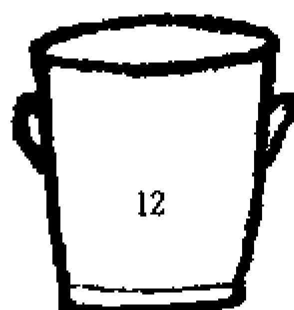
先把小碗的酒倒入大碗，
再把瓶中的酒倒满大碗



把大碗的酒再倒满小碗

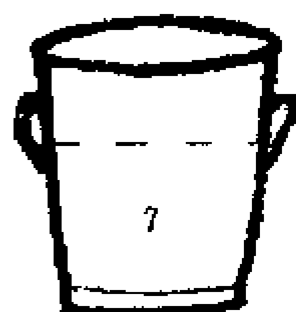
图解249

4. 油郎卖油





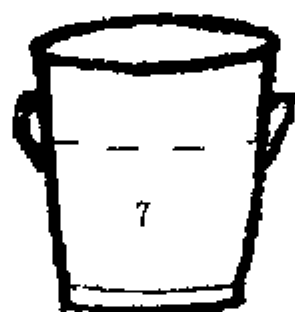




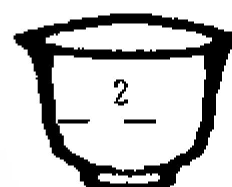




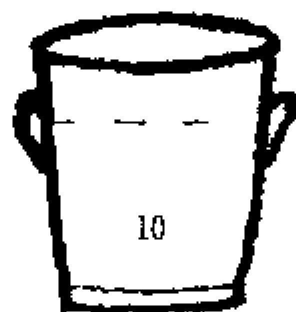
先倒满大碗







把碗中的油倒满小杯







把小杯的油倒回桶中，再
把碗中剩的油倒入小杯



把桶中的油倒满大碗



把大碗的油倒满小杯

图解250

【注：3、4 两题，还有别种分法，请读者再分。】

5、解：$30 + 1 = 31$

$31 \times 3 = 93$　这是小动物本身生育的数量

$(30 - 10) + 1 = 21$

$\frac{1}{2} \times 21 \times 22 = 231$

$231 \times 3^2 = 2079$　这是第三代数量　　（※）

$(30 - 10 \times 2) + 1 = 11$

$\frac{1}{6} \times 11 \times 12 \times 13 = 286$

$286 \times 3^3 = 7722$　这是第四代数量　　（※）

$(30 - 10 \times 3) + 1 = 1$

$1 \times 3^4 = 81$ 这是第五代数量 (※)

$1 + 93 + 2079 + 7722 + 81 = 9976$

答 再过30天小动物总数是9976只

【注】 从第二代起，每次生育数的指数每加一代，其指数加1，如以上有(※)号者，为什么?请读者自己去理解。

6. 解：设参加比赛的人为x，因为每人对赛一局，采取循环赛，故知每人都赛了$(x-1)$局，既然是二人对赛一局，则这一局是你的一局，同时也是我的一局，因此以总人数乘每人所赛的局数再除以2，就是全单位对赛的局数。或者以每一人先轮完其余人，那么，第二人除了已和第一个人赛外，又要再和少一人的其余人比赛，如此递次减一，直至最后剩下二人对赛，也即：第一人先赛$x-1$局，第二人赛$x-2$局，……最后1局，可知总局数等于由1至$(x-1)$的连续数之和，故可得方程：

$105 = \frac{[1+(x-1)](x-1)}{2}$ 整理得$\frac{x(x-1)}{2} = 105$

变形为$x^2 - x - 210 = 0$

因式分解为：$(x-15)(x+14) = 0$

得 $x = 15$， $x = -14$

去掉负数

答 参加比赛的人数有15人。

附

方形图中心数字表

整数 E^2 素数 P^2 复数 A^2 复数 B^2	求"T"公式( )	E^2的"分数" (即按上面所说，由 E 的因数求出其"分数"暂用代号为"T"	共有多少个分数
2 (实为 2^2，为省略起见只写 2，以下均同此)	P (1)	$\frac{1}{2}$	1
3	P (1)	$\frac{1}{3}$	1
4	P (1)	$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$	2
5	P (1)	$\frac{1}{5}$	1
6	A (2)	$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{6}$	4
7	P (1)	$\frac{1}{7}$	1
8	P (1)	$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$	3
9	P (1)	$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{9}$	2

注：有 4 个"分数"的属复数 A

续表一

10	A	$\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{10}$	4
11	P (1)	$\frac{1}{11}$	1
12	B (3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{12}$	7
13	P (1)	$\frac{1}{13}$	1
14	A (2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{1}{14}$	4
15	A (2)	$\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{3}{5},\frac{1}{15}$	4
16	P (1)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16}$	4
17	P (1)	$\frac{1}{17}$	1
18	B (3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{1}{18}$	7
19	P (1)	$\frac{1}{19}$	1
20	B (3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{4}{5},\frac{1}{10},\frac{1}{20}$	7
21	A (2)	$\frac{1}{3},\frac{1}{7},\frac{3}{7},\frac{1}{21},$	4
22	A (2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{11},\frac{2}{11},\frac{1}{22}$	4
23	P (1)	$\frac{1}{23}$	1
24	(3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{1}{12},\frac{1}{24}$	10
25	P (1)	$\frac{1}{5},\frac{1}{25}$	2

注.有7个"分数"的属复数 B

续表二

26	A	$\frac{1}{2},\frac{1}{13},\frac{2}{13},\frac{1}{26}$	4
27	P (1)	$\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27}$	3
28	B (3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{4}{7},\frac{1}{14},\frac{1}{28}$	7
29	P (1)	$\frac{1}{29}$	1
30	(2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{10},\frac{3}{10},\frac{1}{15},\frac{2}{15},\frac{1}{30}$	13
31	P (1)	$\frac{1}{31}$	1
32	P (1)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32}$	5
33	A (2)	$\frac{1}{3},\frac{1}{11},\frac{3}{11},\frac{1}{33}$	4
34	A (2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{17},\frac{2}{17},\frac{1}{34}$	4
35	A (2)	$\frac{1}{5},\frac{1}{7},\frac{5}{7},\frac{1}{35}$	4
36	(7)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{4}{9},\frac{1}{12},\frac{1}{18},\frac{1}{36}$	12
37	P (1)	$\frac{1}{37}$	1
38	A (2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{19},\frac{2}{19},\frac{1}{38}$	4
39	A (2)	$\frac{1}{3},\frac{1}{13},\frac{3}{13},\frac{1}{39}$	4
40	(3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{4}{5},\frac{1}{8},\frac{5}{8},\frac{1}{10},\frac{1}{20},\frac{1}{40}$	10

续表三

41	P	$\frac{1}{41}$	1
42	(2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{6}{7},\frac{1}{14},\frac{3}{14},\frac{1}{21},\frac{2}{21},\frac{1}{42}$	13
43	P (1)	$\frac{1}{43}$	1
44	B (3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{11},\frac{2}{11},\frac{4}{11},\frac{1}{22},\frac{1}{44}$	7
45	B (3)	$\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{3}{5},\frac{1}{9},\frac{5}{9},\frac{1}{15},\frac{1}{45}$	7
46	A (2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{23},\frac{2}{23},\frac{1}{46}$	4
47	P (1)	$\frac{1}{47}$	1
48	(3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{1}{12},\frac{1}{16},\frac{3}{16},\frac{1}{24},\frac{1}{48}$	13
49	P (1)	$\frac{1}{7},\frac{1}{49}$	2
50	B (3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{10},\frac{1}{25},\frac{2}{25},\frac{1}{50}$	7
51	A (2)	$\frac{1}{3},\frac{1}{17},\frac{3}{17},\frac{1}{51}$	4
52	B (3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{13},\frac{2}{13},\frac{4}{13},\frac{1}{26},\frac{1}{52}$	7
53	P (1)	$\frac{1}{53}$	1
54	(3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{1}{18},\frac{1}{27},\frac{2}{27},\frac{1}{51}$	10
55	A (2)	$\frac{1}{5},\frac{1}{11},\frac{5}{11},\frac{1}{55}$	4
56	(3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{4}{7},\frac{1}{8},\frac{7}{8},\frac{1}{14},\frac{1}{28},\frac{1}{56}$	10

续表四

57	A	$\frac{1}{3},\frac{1}{19},\frac{3}{19},\frac{1}{57}$	4
58	A (2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{29},\frac{2}{29},\frac{1}{58}$	4
59	P (1)	$\frac{1}{59}$	1
60	(4)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{10},\frac{3}{10},$ $\frac{1}{12},\frac{5}{12},\frac{1}{15},\frac{2}{15},\frac{4}{15},\frac{1}{20},\frac{3}{20},\frac{1}{30},\frac{1}{60}$	22
61	P (1)	$\frac{1}{61}$	1
62	A (2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{31},\frac{2}{31},\frac{1}{62}$	4
63	(3)	$\frac{1}{3},\frac{1}{7},\frac{3}{7},\frac{1}{9},\frac{7}{9},\frac{1}{21},\frac{1}{63}$	7
64	P (1)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},\frac{1}{64}$	6
65	A (2)	$\frac{1}{5},\frac{1}{13},\frac{5}{13},\frac{1}{65}$	4
66	(2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{11},\frac{2}{11},\frac{6}{11},\frac{3}{11},\frac{1}{22},\frac{3}{22},\frac{1}{33},\frac{2}{33},\frac{1}{66}$	13
67	P (1)	$\frac{1}{67}$	1
68	B (3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{17},\frac{2}{17},\frac{4}{17},\frac{1}{34},\frac{1}{68}$	7
69	A (2)	$\frac{1}{3},\frac{1}{23},\frac{3}{23},\frac{1}{69}$	4
70	(2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{5}{7},\frac{1}{10},\frac{7}{10},\frac{1}{14},\frac{5}{14},\frac{1}{35},\frac{2}{35},\frac{1}{70}$	13

续表五

71	P (1)	$\frac{1}{71}$	1
72	(7)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{4}{9},\frac{8}{9},\frac{1}{12},\frac{1}{18},\frac{1}{24},\frac{1}{36},\frac{1}{72}$	17
73	P (1)	$\frac{1}{73}$	1
74	A (2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{37},\frac{2}{37},\frac{1}{74}$	4
75	B (3)	$\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{3}{5},\frac{1}{15},\frac{1}{25},\frac{3}{25},\frac{1}{75}$	7
76	B (3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{19},\frac{2}{19},\frac{4}{19},\frac{1}{38},\frac{1}{76}$	7
77	A (2)	$\frac{1}{7},\frac{1}{11},\frac{7}{11},\frac{1}{77}$	4
78	(2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{13},\frac{2}{13},\frac{3}{13},\frac{6}{13},\frac{1}{26},\frac{3}{26},\frac{1}{39},\frac{2}{39},\frac{1}{78}$	13
79	P (1)	$\frac{1}{79}$	1
80	(3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{4}{5},\frac{1}{8},\frac{5}{8},\frac{1}{10},\frac{1}{16},\frac{5}{16},\frac{1}{20},\frac{1}{40},\frac{1}{80}$	13
81	P (1)	$\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\frac{1}{81}$	4
82	A (2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{41},\frac{2}{41},\frac{1}{82}$	4
83	P (1)	$\frac{1}{83}$	1
84	(4)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{4}{7},\frac{6}{7},\frac{1}{12},\frac{7}{12},\frac{1}{14},\frac{3}{14},\frac{1}{21},\frac{2}{21},\frac{4}{21},\frac{1}{28},\frac{3}{28},\frac{1}{42},\frac{1}{84}$	22

续表六

85	A (2)	$\frac{1}{5},\frac{1}{17},\frac{5}{17},\frac{1}{85}$	4
86	A (2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{43},\frac{2}{43},\frac{1}{86}$	4
87	A (2)	$\frac{1}{3},\frac{1}{29},\frac{3}{29},\frac{1}{87}$	4
88	(3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{11},\frac{2}{11},\frac{4}{11},\frac{8}{11},\frac{1}{22},\frac{1}{44},\frac{1}{88}$	10
89	P (1)	$\frac{1}{89}$	1
90	(4)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{5}{9},\frac{1}{10},\frac{3}{10},\frac{9}{10},\frac{1}{15},\frac{2}{15},\frac{1}{18},\frac{5}{18},\frac{1}{30},\frac{1}{45},\frac{2}{45},\frac{1}{90}$	22
91	A (2)	$\frac{1}{7},\frac{1}{13},\frac{7}{13},\frac{1}{91}$	4
92	B (2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{23},\frac{2}{23},\frac{4}{23},\frac{1}{46},\frac{1}{92}$	7
93	A (2)	$\frac{1}{3},\frac{1}{31},\frac{3}{31},\frac{1}{93}$	4
94	A (2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{47},\frac{2}{47},\frac{1}{94}$	4
95	A (2)	$\frac{1}{5},\frac{1}{19},\frac{5}{19},\frac{1}{95}$	4
96	(3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{1}{12},\frac{1}{16},\frac{3}{16},\frac{1}{24},\frac{1}{32},\frac{3}{32},\frac{1}{48},\frac{1}{96}$	16
97	P (1)	$\frac{1}{97}$	1
98	B (3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{1}{14},\frac{1}{49},\frac{2}{49},\frac{1}{98}$	7

续表七

99	*B* (3)	$\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{11},\frac{3}{11},\frac{9}{11},\frac{1}{33},\frac{1}{99}$	7
100	(7)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{4}{5},\frac{1}{10},\frac{1}{20},\frac{1}{25},\frac{2}{25},\frac{4}{25},\frac{1}{50},\frac{1}{100}$	12
101	*P* (1)	$\frac{1}{101}$	1
102	(2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{17},\frac{2}{17},\frac{3}{17},\frac{6}{17},\frac{1}{34},\frac{3}{34},\frac{1}{51},\frac{2}{51},\frac{1}{102}$	13
103	*P* (1)	$\frac{1}{103}$	1
104	(3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{13},\frac{2}{13},\frac{4}{13},\frac{8}{13},\frac{1}{26},\frac{1}{52},\frac{1}{104}$	10
105	(2)	$\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{3}{5},\frac{1}{7},\frac{3}{7},\frac{5}{7},\frac{1}{15},\frac{7}{15},\frac{1}{21},\frac{5}{21},\frac{1}{35},\frac{3}{35},\frac{1}{105}$	13
106	*A* (2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{53},\frac{2}{53},\frac{1}{106}$	4
107	*P* (1)	$\frac{1}{107}$	1
108	(7)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{4}{9},\frac{1}{12},\frac{1}{18},\frac{1}{27},\frac{2}{27},\frac{4}{27},\frac{1}{36},\frac{1}{54},\frac{1}{108}$	17
109	*P* (1)	$\frac{1}{109}$	1
110	(2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{10},\frac{1}{11},\frac{2}{11},\frac{5}{11},\frac{10}{11},\frac{1}{22},\frac{5}{22},\frac{1}{55},\frac{2}{55},\frac{1}{110}$	13
111	*A* (2)	$\frac{1}{3},\frac{1}{37},\frac{3}{37},\frac{1}{111}$	4

续表八

112	(2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{4}{7},\frac{1}{8},\frac{7}{8},\frac{1}{14},\frac{1}{16},\frac{7}{16},\frac{1}{28},\frac{1}{56},\frac{1}{112}$	13
113	P (1)	$\frac{1}{113}$	1
114	(2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{19},\frac{2}{19},\frac{3}{19},\frac{6}{19},\frac{1}{38},\frac{3}{38},\frac{1}{57},\frac{2}{57},\frac{1}{114}$	13
115	A (2)	$\frac{1}{5},\frac{1}{23},\frac{5}{23},\frac{1}{115}$	4
116	B (3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{29},\frac{2}{29},\frac{4}{29},\frac{1}{58},\frac{1}{116}$	7
117	B (3)	$\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{13},\frac{3}{13},\frac{9}{13},\frac{1}{39},\frac{1}{117}$	7
118	A (2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{59},\frac{2}{59},\frac{1}{118}$	4
119	A (2)	$\frac{1}{7},\frac{1}{17},\frac{7}{17},\frac{1}{119}$	4
120	(4)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{5}{8},\frac{1}{10},\frac{3}{10},\frac{1}{12},\frac{5}{12},\frac{1}{15},\frac{2}{15},\frac{4}{15},\frac{8}{15},\frac{1}{20},\frac{3}{20},\frac{1}{24},\frac{5}{24},\frac{1}{30},\frac{1}{40},\frac{3}{40},\frac{1}{60},\frac{1}{120}$	31
121	P (1)	$\frac{1}{11},\frac{1}{121}$	2
122	A (2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{61},\frac{2}{61},\frac{1}{122}$	4
123	A (2)	$\frac{1}{3},\frac{1}{41},\frac{3}{41},\frac{1}{123}$	4

续表九

124	B	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{31},\frac{2}{31},\frac{4}{31},\frac{1}{62},\frac{1}{124}$	7
125	P (1)	$\frac{1}{5},\frac{1}{25},\frac{1}{125}$	3
126	(4)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{6}{7},\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{7}{9},\frac{1}{14},\frac{3}{14},$ $\frac{9}{14},\frac{1}{18},\frac{7}{18},\frac{1}{21},\frac{2}{21},\frac{1}{42},\frac{1}{63},\frac{2}{63},\frac{1}{126}$	22
127	P (1)	$\frac{1}{127}$	1
128	P (1)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},\frac{1}{64},\frac{1}{128}$	7
129	A (2)	$\frac{1}{3},\frac{1}{43},\frac{3}{43},\frac{1}{129}$	4
130	(2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{10},\frac{1}{13},\frac{2}{13},\frac{5}{13},\frac{10}{13},\frac{1}{26},\frac{5}{26},\frac{1}{65},\frac{2}{65},\frac{1}{130}$	13
131	P (1)	$\frac{1}{131}$	1
132	(4)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{12},\frac{11}{12},\frac{1}{11},\frac{2}{11},\frac{3}{11},\frac{4}{11},\frac{6}{11},$ $\frac{1}{22},\frac{3}{22},\frac{1}{33},\frac{2}{33},\frac{4}{33},\frac{1}{44},\frac{3}{44},\frac{1}{66},\frac{1}{132}$	22
133	A (2)	$\frac{1}{7},\frac{1}{19},\frac{7}{19},\frac{1}{133}$	4
134	A (2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{67},\frac{2}{67},\frac{1}{134}$	4

续表十

135	(3)	$\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{3}{5},\frac{1}{9},\frac{5}{9},\frac{1}{15},\frac{1}{27},\frac{5}{27},\frac{1}{45},\frac{1}{135}$	10
136	(3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{17},\frac{2}{17},\frac{4}{17},\frac{8}{17},\frac{1}{34},\frac{1}{68},\frac{1}{136}$	10
137	P (1)	$\frac{1}{137}$	1
138	(2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{23},\frac{2}{23},\frac{3}{23},\frac{6}{23},\frac{1}{46},\frac{3}{46},\frac{1}{69},\frac{2}{69},\frac{1}{138}$	13
139	P (1)	$\frac{1}{139}$	1
140	(4)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{4}{5},\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{4}{7},\frac{5}{7},\frac{1}{10},\frac{7}{10},\frac{1}{14},\frac{5}{14},$ $\frac{1}{20},\frac{7}{20},\frac{1}{28},\frac{5}{28},\frac{1}{35},\frac{2}{35},\frac{4}{35},\frac{1}{70},\frac{1}{140}$	22
141	A (2)	$\frac{1}{3},\frac{1}{47},\frac{3}{47},\frac{1}{141}$	4
142	A (2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{71},\frac{2}{71},\frac{1}{142}$	4
143	A (2)	$\frac{1}{11},\frac{1}{13},\frac{11}{13},\frac{1}{143}$	4
144	(7)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{4}{9},\frac{8}{9},\frac{1}{12},$ $\frac{1}{16},\frac{3}{16},\frac{9}{16},\frac{1}{18},\frac{1}{24},\frac{1}{36},\frac{1}{48},\frac{1}{72},\frac{1}{144}$	22
145	A (2)	$\frac{1}{5},\frac{1}{29},\frac{5}{29},\frac{1}{145}$	4
146	A (2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{73},\frac{2}{73},\frac{1}{146}$	4

续表十一

147	B (3)	$\frac{1}{3},\frac{1}{7},\frac{3}{7},\frac{1}{21},\frac{1}{49},\frac{3}{49},\frac{1}{147}$	7
148	B (3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{37},\frac{2}{37},\frac{4}{37},\frac{1}{74},\frac{1}{148}$	7
149	P (1)	$\frac{1}{149}$	1
150	(4)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{10},\frac{3}{10},\frac{1}{15},\frac{2}{15},\frac{1}{25},$ $\frac{2}{25},\frac{3}{25},\frac{6}{25},\frac{1}{30},\frac{1}{50},\frac{3}{50},\frac{1}{75},\frac{2}{75},\frac{1}{150}$	22
151	P (1)	$\frac{1}{151}$	1
152	(3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{19},\frac{2}{19},\frac{4}{19},\frac{8}{19},\frac{1}{38},\frac{1}{76},\frac{1}{152}$	10
153	B (3)	$\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{17},\frac{3}{17},\frac{9}{17},\frac{1}{51},\frac{1}{153}$	7
154	(2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{1}{11},\frac{2}{11},\frac{7}{11},\frac{1}{14},\frac{11}{14},\frac{1}{22},\frac{7}{22},\frac{1}{77},\frac{2}{77},\frac{1}{154}$	13
155	A (2)	$\frac{1}{5},\frac{1}{31},\frac{5}{31},\frac{1}{155}$	4
156	(4)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{12},\frac{1}{13},\frac{2}{13},\frac{3}{13},\frac{4}{13},\frac{6}{13},\frac{12}{13},$ $\frac{1}{26},\frac{3}{26},\frac{1}{39},\frac{2}{39},\frac{4}{39},\frac{1}{52},\frac{3}{52},\frac{1}{78},\frac{1}{156}$	22
157	P (1)	$\frac{1}{157}$	1
158	A (2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{79},\frac{2}{79},\frac{1}{158}$	4
159	A (2)	$\frac{1}{3},\frac{1}{53},\frac{3}{53},\frac{1}{159}$	4

续表十二

160	(3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{4}{5},\frac{1}{8},\frac{5}{8},\frac{1}{10},\frac{1}{16},\frac{5}{16},\frac{1}{20},\frac{1}{32},\frac{5}{32},\frac{1}{40},\frac{1}{80},\frac{1}{160}$	16
161	*A* (2)	$\frac{1}{7},\frac{1}{23},\frac{7}{23},\frac{1}{161}$	4
162	(3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{1}{18},\frac{1}{27},\frac{2}{27},\frac{1}{54},\frac{1}{81},\frac{2}{81},\frac{1}{162}$	13
163	*P* (1)	$\frac{1}{163}$	1
164	*B* (3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{41},\frac{2}{41},\frac{4}{41},\frac{1}{82},\frac{1}{164}$	7
165	(2)	$\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{3}{5},\frac{1}{11},\frac{3}{11},\frac{5}{11},\frac{1}{15},\frac{11}{15},\frac{1}{33},\frac{5}{33},\frac{1}{55},\frac{3}{55},\frac{1}{165}$	13
166	*A* (2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{83},\frac{2}{83},\frac{1}{166}$	4
167	*P* (1)	$\frac{1}{167}$	1
168	(4)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{4}{7},\frac{6}{7},\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{7}{8},\frac{1}{12},\frac{7}{12},\frac{1}{14},\frac{3}{14},\frac{1}{21},\frac{2}{21},\frac{4}{21},\frac{8}{21},\frac{1}{24},\frac{7}{24},\frac{1}{28},\frac{3}{28},\frac{1}{42},\frac{1}{56},\frac{3}{56},\frac{1}{84},\frac{1}{168}$	31
169	*P* (1)	$\frac{1}{13},\frac{1}{169}$	2
170	(2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{10},\frac{1}{17},\frac{2}{17},\frac{5}{17},\frac{10}{17},\frac{1}{34},\frac{5}{34},\frac{1}{85},\frac{2}{85},\frac{1}{170}$	13
171	*B* (3)	$\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{19},\frac{3}{19},\frac{9}{19},\frac{1}{171},\frac{1}{57}$	7

续表十三

172	B (3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{43},\frac{2}{43},\frac{4}{43},\frac{1}{86},\frac{1}{172}$	7
173	P (1)	$\frac{1}{173}$	1
174	(2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{29},\frac{2}{29},\frac{3}{29},\frac{6}{29},\frac{1}{58},\frac{3}{58},\frac{1}{87},\frac{2}{87},\frac{1}{174}$	13
175	B (3)	$\frac{1}{5},\frac{1}{7},\frac{5}{7},\frac{1}{25},\frac{7}{25},\frac{1}{35},\frac{1}{175}$	7
176	(3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{11},\frac{2}{11},\frac{4}{11},\frac{8}{11},\frac{1}{16},\frac{11}{16},\frac{1}{22},\frac{1}{44},\frac{1}{88},\frac{1}{176}$	13
177	A (2)	$\frac{1}{3},\frac{1}{59},\frac{3}{59},\frac{1}{177}$	4
178	A (2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{89},\frac{2}{89},\frac{1}{178}$	4
179	P (1)	$\frac{1}{179}$	1
180	(7)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{9},\frac{2}{9},$ $\frac{4}{9},\frac{5}{9},\frac{1}{10},\frac{3}{10},\frac{9}{10},\frac{1}{12},\frac{5}{12},\frac{1}{15},\frac{2}{15},\frac{4}{15},\frac{1}{18},\frac{5}{18},\frac{1}{20},$ $\frac{3}{20},\frac{9}{20},\frac{1}{30},\frac{1}{36},\frac{5}{36},\frac{1}{45},\frac{2}{45},\frac{4}{45},\frac{1}{60},\frac{1}{90},\frac{1}{180}$	37
181	P (1)	$\frac{1}{181}$	1
182	(2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{1}{13},\frac{2}{13},\frac{7}{13},\frac{1}{14},\frac{13}{14},\frac{1}{26},\frac{7}{26},\frac{1}{91},\frac{2}{91},\frac{1}{182}$	13

续表十四

183	A	$\frac{1}{3},\frac{1}{61},\frac{3}{61},\frac{1}{183}$	4
184	(3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{23},\frac{2}{23},\frac{4}{23},\frac{8}{23},\frac{1}{46},\frac{1}{92},\frac{1}{184}$	10
185	A (2)	$\frac{1}{5},\frac{1}{37},\frac{5}{37},\frac{1}{185}$	4
186	(2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{31},\frac{2}{31},\frac{3}{31},\frac{6}{31},\frac{1}{62},\frac{3}{62},\frac{1}{93},\frac{2}{93},\frac{1}{186}$	13
187	A (2)	$\frac{1}{11},\frac{1}{17},\frac{11}{17},\frac{1}{187}$	4
188	B (3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{47},\frac{2}{47},\frac{4}{47},\frac{1}{94},\frac{1}{188}$	7
189	(3)	$\frac{1}{3},\frac{1}{7},\frac{3}{7},\frac{1}{9},\frac{7}{9},\frac{1}{21},\frac{1}{27},\frac{7}{27},\frac{1}{63},\frac{1}{189}$	10
190	(2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{10},\frac{1}{19},\frac{2}{19},\frac{5}{19},\frac{10}{19},\frac{1}{38},\frac{5}{38},\frac{1}{95},\frac{2}{95},\frac{1}{190}$	13
191	P (1)	$\frac{1}{191}$	1
192	(3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{1}{12},\frac{1}{16},\frac{3}{16},\frac{1}{24},\frac{1}{32},\frac{3}{32},\frac{1}{48},\frac{1}{64},\frac{3}{64},\frac{1}{96},\frac{1}{192}$	19
193	P (1)	$\frac{1}{193}$	1
194	A (2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{97},\frac{2}{97},\frac{1}{194}$	4
195	(2)	$\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{3}{5},\frac{1}{13},\frac{3}{13},\frac{5}{13},\frac{1}{15},\frac{13}{15},\frac{1}{39},\frac{5}{39},\frac{1}{65},\frac{3}{65},\frac{1}{195}$	13

续表十五

196	(7)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{4}{7},\frac{1}{14},\frac{1}{28},\frac{1}{49},\frac{2}{49},\frac{4}{49},\frac{1}{98},\frac{1}{196}$	12
197	P (1)	$\frac{1}{197}$	1
198	(4)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{1}{11},\frac{2}{11},\frac{3}{11},\frac{6}{11},\frac{9}{11},\frac{1}{18},\frac{11}{18},$ $\frac{1}{22},\frac{3}{22},\frac{9}{22},\frac{1}{33},\frac{2}{33},\frac{1}{66},\frac{1}{99},\frac{2}{99},\frac{1}{198}$	22
199	P (1)	$\frac{1}{199}$	1
200	(7)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{4}{5},\frac{1}{8},\frac{5}{8},\frac{1}{10},\frac{1}{20},\frac{1}{25},\frac{2}{25},\frac{4}{25},\frac{8}{25},$ $\frac{1}{40},\frac{1}{50},\frac{1}{100},\frac{1}{200}$	17
201	A (2)	$\frac{1}{3},\frac{1}{67},\frac{3}{67},\frac{1}{201}$	4
202	A (2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{101},\frac{2}{101},\frac{1}{202}$	4
203	A (2)	$\frac{1}{7},\frac{1}{29},\frac{7}{29},\frac{1}{203}$	4
204	(4)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{12},\frac{1}{17},\frac{2}{17},\frac{3}{17},\frac{4}{17},\frac{6}{17},\frac{12}{17},$ $\frac{1}{34},\frac{3}{34},\frac{1}{51},\frac{2}{51},\frac{4}{51},\frac{1}{68},\frac{3}{68},\frac{1}{102},\frac{1}{204}$	22
205	A (2)	$\frac{1}{5},\frac{1}{41},\frac{5}{41},\frac{1}{205}$	4
206	A (2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{103},\frac{2}{103},\frac{1}{206}$	4

续表十六

207	*B* (3)	$\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{23},\frac{3}{23},\frac{9}{23},\frac{1}{69},\frac{1}{207}$	7
208	(3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{13},\frac{2}{13},\frac{4}{13},\frac{8}{13},\frac{1}{16},\frac{13}{16},\frac{1}{26},\frac{1}{52},\frac{1}{104},\frac{1}{208}$	13
209	*A* (2)	$\frac{1}{11},\frac{1}{19},\frac{11}{19},\frac{1}{209}$	4
210	(2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{5}{7},\frac{6}{7},\frac{1}{10},\frac{3}{10},\frac{7}{10},\frac{1}{14},\frac{3}{14},\frac{5}{14},\frac{1}{15},\frac{2}{15},\frac{7}{15},\frac{14}{15},\frac{1}{21},\frac{2}{21},\frac{5}{21},\frac{10}{21},\frac{1}{30},\frac{7}{30},\frac{1}{35},\frac{2}{35},\frac{3}{35},\frac{6}{35},\frac{1}{42},\frac{5}{42},\frac{1}{70},\frac{3}{70},\frac{1}{105},\frac{2}{105},\frac{1}{210}$	40
211	*P* (1)	$\frac{1}{211}$	1
212	*B* (3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{53},\frac{2}{53},\frac{4}{53},\frac{1}{106},\frac{1}{212}$	7
213	*A* (2)	$\frac{1}{3},\frac{1}{71},\frac{3}{71},\frac{1}{213}$	4
214	*A* (2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{107},\frac{2}{107},\frac{1}{214}$	4
215	*A* (2)	$\frac{1}{5},\frac{1}{43},\frac{5}{43},\frac{1}{215}$	4
216	(7)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{4}{9},\frac{8}{9},\frac{1}{12},\frac{1}{18},\frac{1}{24},\frac{1}{27},\frac{2}{27},\frac{4}{27},\frac{8}{27},\frac{1}{36},\frac{1}{54},\frac{1}{72},\frac{1}{108},\frac{1}{216}$	24

续表十七

217	A (2)	$\frac{1}{7},\frac{1}{31},\frac{7}{31},\frac{1}{217}$	4
218	A (2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{109},\frac{2}{109},\frac{1}{218}$	4
219	A (2)	$\frac{1}{3},\frac{1}{73},\frac{3}{73},\frac{1}{219}$	4
220	(4)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{4}{5},\frac{1}{10},\frac{1}{11},\frac{2}{11},\frac{4}{11},\frac{5}{11},\frac{10}{11},\frac{1}{20},\frac{11}{20},$ $\frac{1}{22},\frac{5}{22},\frac{1}{44},\frac{5}{44},\frac{1}{55},\frac{2}{55},\frac{4}{55},\frac{1}{110},\frac{1}{220}$	22
221	A (2)	$\frac{1}{13},\frac{1}{17},\frac{13}{17},\frac{1}{221}$	4
222	A (2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{37},\frac{2}{37},\frac{3}{37},\frac{6}{37},\frac{1}{74},\frac{3}{74},\frac{1}{111},\frac{2}{111},\frac{1}{222}$	13
223	P (1)	$\frac{1}{223}$	1
224	(3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{4}{7},\frac{1}{8},\frac{7}{8},\frac{1}{14},\frac{1}{16},\frac{7}{16},\frac{1}{28},\frac{1}{32},\frac{7}{32},$ $\frac{1}{56},\frac{1}{112},\frac{1}{224}$	16
225	(7)	$\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{3}{5},\frac{1}{9},\frac{5}{9},\frac{1}{15},\frac{1}{25},\frac{3}{25},\frac{9}{25},\frac{1}{45},\frac{1}{75},\frac{1}{225}$	12
226	A (2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{113},\frac{2}{113},\frac{1}{226}$	4
227	P (1)	$\frac{1}{227}$	1

续表十八

228	(4)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{12},\frac{1}{19},\frac{2}{19},\frac{3}{19},\frac{4}{19},\frac{6}{19},\frac{12}{19},$ $\frac{1}{38},\frac{3}{38},\frac{1}{57},\frac{2}{57},\frac{4}{57},\frac{1}{76},\frac{3}{76},\frac{1}{114},\frac{1}{228}$	22
229	P (1)	$\frac{1}{229}$	1
230	(2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{10},\frac{1}{23},\frac{2}{23},\frac{5}{23},\frac{10}{23},\frac{1}{46},\frac{5}{46},\frac{1}{115},\frac{2}{115},\frac{1}{230}$	13
231	(2)	$\frac{1}{3},\frac{1}{7},\frac{3}{7},\frac{1}{11},\frac{3}{11},\frac{7}{11},\frac{1}{21},\frac{11}{21},\frac{1}{33},\frac{7}{33},\frac{1}{77},\frac{3}{77},\frac{1}{231}$	13
232	(3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{29},\frac{2}{29},\frac{4}{29},\frac{8}{29},\frac{1}{58},\frac{1}{116},\frac{1}{232}$	10
233	P (1)	$\frac{1}{233}$	1
234	(4)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{1}{13},\frac{2}{13},\frac{3}{13},\frac{6}{13},\frac{9}{13},\frac{1}{18},\frac{13}{18},$ $\frac{1}{26},\frac{3}{26},\frac{9}{26},\frac{1}{39},\frac{2}{39},\frac{1}{78},\frac{1}{117},\frac{2}{117},\frac{1}{234}$	22
235	A (2)	$\frac{1}{5},\frac{1}{47},\frac{5}{47},\frac{1}{235}$	4
236	B (3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{59},\frac{2}{59},\frac{4}{59},\frac{1}{118},\frac{1}{236}$	7
237	A (2)	$\frac{1}{3},\frac{1}{79},\frac{3}{79},\frac{1}{237}$	4

续表十九

238	(2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{1}{14},\frac{1}{17},\frac{2}{17},\frac{7}{17},\frac{14}{17},\frac{1}{34},\frac{7}{34},\frac{1}{119},\frac{2}{119},\frac{1}{238}$	13
239	P (1)	$\frac{1}{239}$	1
240	(4)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{5}{8},\frac{1}{10},\frac{3}{10},\frac{1}{12},\frac{5}{12},\frac{1}{15},\frac{2}{15},\frac{4}{15},\frac{8}{15},\frac{1}{16},\frac{3}{16},\frac{5}{16},\frac{15}{16},\frac{1}{20},\frac{3}{20},\frac{1}{24},\frac{5}{24},\frac{1}{30},\frac{1}{40},\frac{3}{40},\frac{1}{48},\frac{5}{48},\frac{1}{60},\frac{1}{80},\frac{3}{80},\frac{1}{120},\frac{1}{240}$	40
241	P (1)	$\frac{1}{241}$	1
242	B (3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{11},\frac{2}{11},\frac{1}{22},\frac{1}{121},\frac{2}{121},\frac{1}{242}$	7
243	P (1)	$\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\frac{1}{81},\frac{1}{243}$	5
244	B (3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{61},\frac{2}{61},\frac{4}{61},\frac{1}{122},\frac{1}{244}$	7
245	B (3)	$\frac{1}{5},\frac{1}{7},\frac{5}{7},\frac{1}{35},\frac{1}{49},\frac{5}{49},\frac{1}{245}$	7
246	(2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{41},\frac{2}{41},\frac{3}{41},\frac{6}{41},\frac{1}{82},\frac{3}{82},\frac{1}{123},\frac{2}{123},\frac{1}{246}$	13
247	A (2)	$\frac{1}{13},\frac{1}{19},\frac{13}{19},\frac{1}{247}$	4

续表二十

248	(3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{31},\frac{2}{31},\frac{4}{31},\frac{8}{31},\frac{1}{62},\frac{1}{124},\frac{1}{248}$	10
249	A (2)	$\frac{1}{3},\frac{1}{83},\frac{3}{83},\frac{1}{249}$	4
250	(3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{10},\frac{1}{25},\frac{2}{25},\frac{1}{50},\frac{1}{125},\frac{2}{125},\frac{1}{250}$	10
251	P (1)	$\frac{1}{251}$	1
252	(7)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{4}{7},\frac{6}{7},\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{4}{9},\frac{7}{9},\frac{1}{12},\frac{7}{12},\frac{1}{14},\frac{3}{14},\frac{9}{14},\frac{1}{18},\frac{7}{18},\frac{1}{21},\frac{2}{21},\frac{4}{21},\frac{1}{28},\frac{3}{28},\frac{9}{28},\frac{1}{36},\frac{7}{36},\frac{1}{42},\frac{1}{63},\frac{2}{63},\frac{4}{63},\frac{1}{84},\frac{1}{126},\frac{1}{252}$	37
253	A (2)	$\frac{1}{11},\frac{1}{23},\frac{11}{23},\frac{1}{253}$	4
254	A (2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{127},\frac{2}{127},\frac{1}{254}$	4
255	(2)	$\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{3}{5},\frac{1}{15},\frac{1}{17},\frac{3}{17},\frac{5}{17},\frac{15}{17},\frac{1}{51},\frac{5}{51},\frac{1}{85},\frac{3}{85},\frac{1}{255}$	13
256	P (1)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},\frac{1}{64},\frac{1}{128},\frac{1}{256}$	8
257	P (1)	$\frac{1}{257}$	1
258	(2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{43},\frac{2}{43},\frac{3}{43},\frac{6}{43},\frac{1}{86},\frac{3}{86},\frac{1}{129},\frac{2}{129},\frac{1}{258}$	13
259	A (2)	$\frac{1}{7},\frac{1}{37},\frac{7}{37},\frac{1}{259}$	4

续表二十一

260	(4)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{4}{5},\frac{1}{10},\frac{1}{13},\frac{2}{13},\frac{4}{13},\frac{5}{13},\frac{10}{13},\frac{1}{20},\frac{13}{20},\frac{1}{26},\frac{5}{26},\frac{1}{52},\frac{5}{52},\frac{1}{65},\frac{2}{65},\frac{4}{65},\frac{1}{130},\frac{1}{260}$	22
261	B (3)	$\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{29},\frac{3}{29},\frac{9}{29},\frac{1}{87},\frac{1}{261}$	7
262	A (2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{131},\frac{2}{131},\frac{1}{262}$	4
263	P (1)	$\frac{1}{263}$	1
264	(4)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{1}{11},\frac{2}{11},\frac{3}{11},\frac{4}{11},\frac{6}{11},\frac{8}{11},\frac{1}{12},\frac{11}{12},\frac{1}{22},\frac{3}{22},\frac{1}{24},\frac{11}{24},\frac{1}{33},\frac{2}{33},\frac{4}{33},\frac{6}{33},\frac{8}{33},\frac{1}{44},\frac{3}{44},\frac{1}{66},\frac{1}{88},\frac{1}{132},\frac{1}{264}$	31
265	A (2)	$\frac{1}{5},\frac{1}{53},\frac{5}{53},\frac{1}{265}$	4
266	(2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{1}{14},\frac{1}{19},\frac{2}{19},\frac{7}{19},\frac{14}{19},\frac{1}{38},\frac{7}{38},\frac{1}{133},\frac{2}{133},\frac{1}{266}$	13
267	A (2)	$\frac{1}{3},\frac{1}{89},\frac{3}{89},\frac{1}{267}$	4
268	B (3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{67},\frac{2}{67},\frac{4}{67},\frac{1}{134},\frac{1}{268}$	7
269	P (1)	$\frac{1}{269}$	1

续表二十二

270	(4)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{5}{9},\frac{1}{10},\frac{3}{10},\frac{9}{10},\frac{1}{15},\frac{2}{15},\frac{1}{18},\frac{5}{18},\frac{1}{27},\frac{2}{27},\frac{5}{27},\frac{10}{27},\frac{1}{30},\frac{1}{45},\frac{2}{45},\frac{1}{54},\frac{5}{54},\frac{1}{90},\frac{1}{135},\frac{2}{135},\frac{1}{270}$	31
271	P (1)	$\frac{1}{271}$	1
272	(3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{17},\frac{2}{17},\frac{4}{17},\frac{8}{17},\frac{16}{17},\frac{1}{34},\frac{1}{68},\frac{1}{136},\frac{1}{272}$	13
273	(2)	$\frac{1}{3},\frac{1}{7},\frac{3}{7},\frac{1}{13},\frac{3}{13},\frac{7}{13},\frac{1}{21},\frac{13}{21},\frac{1}{39},\frac{7}{39},\frac{1}{91},\frac{3}{91},\frac{1}{273}$	13
274	A (2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{137},\frac{2}{137},\frac{1}{274}$	4
275	B (3)	$\frac{1}{5},\frac{1}{11},\frac{5}{11},\frac{1}{25},\frac{11}{25},\frac{1}{55},\frac{1}{275}$	7
276	(4)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{12},\frac{1}{23},\frac{2}{23},\frac{3}{23},\frac{4}{23},\frac{6}{23},\frac{12}{23},\frac{1}{46},\frac{3}{46},\frac{1}{69},\frac{2}{69},\frac{4}{69},\frac{1}{92},\frac{3}{92},\frac{1}{138},\frac{1}{276}$	22
277	P (1)	$\frac{1}{277}$	1
278	A (2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{139},\frac{2}{139},\frac{1}{278}$	4

续表二十三

279	*B*	$\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{31},\frac{3}{31},\frac{9}{31},\frac{1}{93},\frac{1}{279}$	7
280	(4)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{4}{5},\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{4}{7},\frac{5}{7},\frac{1}{8},\frac{5}{8},\frac{7}{8},\frac{1}{10},$ $\frac{7}{10},\frac{1}{14},\frac{5}{14},\frac{1}{20},\frac{7}{20},\frac{1}{28},\frac{5}{28},\frac{1}{35},\frac{2}{35},\frac{4}{35},\frac{8}{35},\frac{1}{40},\frac{7}{40},$ $\frac{1}{56},\frac{5}{56},\frac{1}{70},\frac{1}{140},\frac{1}{280}$	31
281	*P* (1)	$\frac{1}{281}$	1
282	(4)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{47},\frac{2}{47},\frac{3}{47},\frac{6}{47},\frac{1}{94},\frac{3}{94},\frac{1}{145},\frac{2}{145},\frac{1}{282}$	13
283	*P* (1)	$\frac{1}{283}$	1
284	*B* (3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{71},\frac{2}{71},\frac{4}{71},\frac{1}{142},\frac{1}{284}$	7
285	(4)	$\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{3}{5},\frac{1}{15},\frac{1}{19},\frac{3}{19},\frac{5}{19},\frac{15}{19},\frac{1}{57},\frac{5}{57},\frac{1}{95},\frac{3}{95},\frac{1}{285}$	13
286	(4)	$\frac{1}{2},\frac{1}{11},\frac{2}{11},\frac{1}{13},\frac{2}{13},\frac{11}{13},\frac{1}{22},\frac{13}{22},\frac{1}{26},\frac{11}{26},\frac{1}{143},\frac{2}{143},\frac{1}{286}$	13
287	*A* (2)	$\frac{1}{7},\frac{1}{41},\frac{7}{41},\frac{1}{287}$	4
288	(7)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{4}{9},\frac{8}{9},\frac{1}{12},$ $\frac{1}{16},\frac{3}{16},\frac{9}{16},\frac{1}{18},\frac{1}{24},\frac{1}{32},\frac{3}{32},\frac{9}{32},\frac{1}{36},\frac{1}{48},\frac{1}{72},\frac{1}{96},\frac{1}{144},$ $\frac{1}{288}$	27
289	*P* (1)	$\frac{1}{17},\frac{1}{289}$	2
290	(4)	$\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{10},\frac{1}{29},\frac{2}{29},\frac{5}{29},\frac{10}{29},\frac{1}{58},\frac{5}{58},\frac{1}{145},\frac{2}{145},\frac{1}{290}$	13
291	*A* (2)	$\frac{1}{3},\frac{1}{97},\frac{3}{97},\frac{1}{291}$	4

续表二十四

292	B (2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{73},\frac{2}{73},\frac{4}{73},\frac{1}{146},\frac{1}{292}$	7
293	P (1)	$\frac{1}{293}$	1
294	(4)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{6}{7},\frac{1}{14},\frac{3}{14},\frac{1}{21},\frac{2}{21},\frac{1}{42},$ $\frac{1}{49},\frac{2}{49},\frac{3}{49},\frac{6}{49},\frac{1}{98},\frac{3}{98},\frac{1}{147},\frac{2}{147},\frac{1}{294}$	22
295	A (2)	$\frac{1}{5},\frac{1}{59},\frac{5}{59},\frac{1}{295}$	4
296	(3)	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{37},\frac{2}{37},\frac{4}{37},\frac{8}{37},\frac{1}{74},\frac{1}{148},\frac{1}{296}$	10
297	(3)	$\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{11},\frac{3}{11},\frac{9}{11},\frac{1}{27},\frac{11}{27},\frac{1}{33},\frac{1}{99},\frac{1}{297}$	10
298	A (2)	$\frac{1}{2},\frac{1}{149},\frac{2}{149},\frac{1}{298}$	4
299	A (2)	$\frac{1}{13},\frac{1}{23},\frac{13}{23},\frac{1}{299}$	4
300	(7)	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{10},\frac{3}{10},$ $\frac{1}{12},\frac{5}{12},\frac{1}{15},\frac{2}{15},\frac{4}{15},\frac{1}{20},\frac{3}{20},\frac{1}{25},\frac{2}{25},\frac{3}{25},\frac{4}{25},\frac{6}{25},\frac{12}{25},$ $\frac{1}{30},\frac{1}{50},\frac{3}{50},\frac{1}{60},\frac{1}{75},\frac{2}{75},\frac{4}{75},\frac{1}{100},\frac{3}{100},\frac{1}{150},\frac{1}{300}$	37

注:P 是素数(包括素数的多次方数)

后　记

朋友都说我的性子很固执，但我就认定，如果没有这个性子，这本书到现在决不会写出来。

我癖爱数学，从童年起就是个数学迷。八十年代初期，我的同学陈昌宏君（他在琼山市教师进修学校执教多年）曾建议我写一本关于推理方面的数学书，而我的确也有这个愿望，所以十多年来，几乎所有的业余时间都用在数学上，甚至达到废寝忘食的地步，妻子和朋友多次劝我注意身体健康，但我总是听不进耳，成了一个名副其实的固执人。

经过潜心钻研，今天，《不定方程的整数解和填数法》终于问世了，夙愿实现，此时此刻，我的心情非常激动。

写书难，但出书也难，本书在出版过程中承蒙很多亲友的关心和帮助，最后才能付梓。际此，我对亲友们表示衷心感谢。

数学和我已结下不解之缘，不定方程在我的脑子里好像春潮带雨，使我意犹未尽。“学海无涯”愿与读者共勉。

作者

一九九四年六月于海口